Калманович В.В.

Матричный метод решения нестационарной задачи теплопроводности в многослойной планарной среде, реализуемый в программе

Процесс остывания (нагрева) материала может быть описан одномерным уравнением тепломассопереноса

$$a_2(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{1}$$

где $\Phi(x, t)$ – потенциал процесса переноса, направленного нормально к поверхности мишени и границам слоев, t – время, функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$ определены физическими и геометрическими параметрами материала, плотность потока описывается выражением $J=-a_1(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, ось x направлена по потоку.

Введем операторы

$$D_1=a_1(x)\frac{\partial}{\partial x},\ D_2=a_2(x)\frac{\partial}{\partial x} \tag{2}$$

Рассмотрим многослойную среду из n плоских слоев, расположенных от начальной координаты x_1 до конечной x_{n+1}, слои занумерованы левой координатой. Будем номер слоя ставить для данной величины вверху в скобках. Тогда процесс переноса в каждом слое определен потенциалом $\Phi^{(i)}(x,t)$ и потоком $J^{(i)}(x,t)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$D_2^{(i)}D_1^{(i)}\Phi^{(i)}=\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial t},\ i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$J=-D_1^{(i)}\Phi,\ i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

Поставим первую краевую задачу с заданным начальным условием для многослойной среды. На границах требуем

$$\Phi^{(1)}(x_1,t)=0,\ \Phi^{(n)}(x_{n+1,}t)=0. \tag{5}$$

Известно начальное распределение потенциала во всей среде

$$\Phi^{(i)}(x,0)=g(x),\ x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Функция $g(x)$ задана для всей многослойной среды. На границах слоёв примем условия идеального контакта, выраженного в непрерывности потенциала и потока во всех точках x_2, …, x_n.

$$\varPhi^{(i)}(x_{i+1},t)=\varPhi^{(i+1)}(x_{i+1},t),\ J^{(i)}(x_{i+1},t)=J^{(i+1)}(x_{i+1},t),\ i=\overline{1,n-1}. \qquad (7)$$

Решение задачи будем искать методом Фурье. Частное решение уравнений (3) будем искать в виде

$$\varPhi^{(i)}(x,t)=u^{(i)}(x)e^{-\lambda^2 t},\ j^{(i)}=-D_1 u^{(i)},\ i=\overline{1,n}. \qquad (8)$$

Амплитудная функция $u^{(i)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$D_2^{(i)}D_1^{(i)}u^{(i)}(x)+\lambda^2 u^{(i)}(x)=0 \qquad (9)$$

и граничным условиям

$$u^{(1)}(x_1)=0,\ u^{(n)}(x_{n+1})=0, \qquad (10)$$

$$u^{(i)}(x_{i+1})=u^{(i+1)}(x_{i+1}),\ i=\overline{1,n-1}. \qquad (11)$$

Решение задачи Коши для каждого слоя имеет вид

$$\begin{aligned} u^{(i)}(x)&=u^{(i)}(x_i)\cos\lambda X_i(x,x_i)-\frac{1}{\lambda}j^{(i)}(x_i)\sin\lambda X(x,x_i),\\ j^{(i)}(x)&=u^{(i)}(x_i)\lambda\sin\lambda\tilde{X}_i(x,x_i)+j^{(i)}(x_i)\cos\lambda\tilde{X}(x,x_i). \end{aligned} \qquad (12)$$

Здесь решения представлены в форме обобщенных степеней Берса [1, 2], такой подход позволяет в единой форме учитывать геометрию среды и зависимость коэффициентов уравнения от координаты. Программа выполняет расчеты в частном случае, когда коэффициенты уравнения теплопроводности постоянны в каждом слое. В этом случае $a_1^{(i)}=\lambda_c^{(i)},\ a_2^{(i)}=\dfrac{1}{c^{(i)}\rho^{(i)}}$, где $\lambda_c^{(i)},\ c^{(i)},\ \rho^{(i)}$ – коэффициент теплопроводности, теплоёмкость и плотность среды соответственно, а функции обобщенных степеней имеют вид

$$\cos\lambda X(x,x_i)=\cos\lambda\tilde{X}(x,x_i)=\cos\frac{\lambda}{\sqrt{a_1^{(i)}a_2^{(i)}}}\left(x-x_1\right),$$

$$\sin\lambda X(x,x_i)=\sqrt{\frac{a_2^{(i)}}{a_1^{(i)}}}\sin\frac{\lambda}{\sqrt{a_1^{(i)}a_2^{(i)}}}\left(x-x_1\right),\ \sin\lambda\tilde{X}(x,x_i)=\sqrt{\frac{a_1^{(i)}}{a_2^{(i)}}}\sin\frac{\lambda}{\sqrt{a_1^{(i)}a_2^{(i)}}}\left(x-x_1\right).$$

Введём вектор-столбцы $V^{(i)}(x)$, $V^{(i)}(x_i)$ и матрицу K

$$V^{(i)}(x)=\begin{pmatrix}u^{(i)}(x)\\ j^{(i)}(x)\end{pmatrix},\ V^{(i)}(x_i)=\begin{pmatrix}u^{(i)}(x_i)\\ j^{(i)}(x_i)\end{pmatrix},$$

$$K^{(i)}(x,x_i)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\lambda}{\sqrt{a_1^{(i)}a_2^{(i)}}}\left(x-x_1\right) & -\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{a_2^{(i)}}{a_1^{(i)}}}\sin\frac{\lambda}{\sqrt{a_1^{(i)}a_2^{(i)}}}\left(x-x_1\right)\\ \lambda\sqrt{\frac{a_1^{(i)}}{a_2^{(i)}}}\sin\frac{\lambda}{\sqrt{a_1^{(i)}a_2^{(i)}}}\left(x-x_1\right) & \cos\frac{\lambda}{\sqrt{a_1^{(i)}a_2^{(i)}}}\left(x-x_1\right)\end{pmatrix}.$$

Тогда систему (12) запишем в виде

$$V^{(i)}(x)=K^{(i)}(x,x_i)V^{(i)}(x_i)\,. \tag{13}$$

Для крайней точки i-го слоя получим

$$V^{(i)}(x_{i+1})=K^{(i)}(x_{i+1},x_i)V^{(i)}(x_i)\,. \tag{14}$$

Выражение (14), учитывая контактные условия

$$V^{(i)}(x_{i+1})=V^{(i+1)}(x_{i+1})\,, \tag{15}$$

будем применять последовательно, начиная с первого слоя, тогда получим:

$$V^{(i)}(x)=K^{(i)}(x,x_1)V^{(1)}(x_1),\ x\in[x_i,x_{i+1}], \tag{16}$$

где $K^{(i)}(x,x_1)=K^{(i)}(x,x_i)K^{(i-1)}(x_i,x_{i-1})...K^{(1)}(x_2,x_1)$.

Выражение (16) определяет значения потенциала $u^{(i)}(x)$ и потока $j^{(i)}(x)$ в i-ом слое через значения $u^{(1)}(x_1)$ и $j^{(1)}(x_1)$ в начальной точке системы. В конечной точке системы слоев получим

$$V^{(n)}(x_{n+1})=K^{(n)}(x_{n+1},x_1)V^{(1)}(x_1) \tag{17}$$

Обозначив элементы матрицы $K^{(n)}$ в формуле (19) как $k_{ij}^{(n)}$, запишем

$$\begin{aligned}u^{(n)}(x_{n+1})&=k_{11}^{(n)}u^{(1)}(x_1)+k_{12}^{(n)}j^{(1)}(x_1),\\ j^{(n)}(x_{n+1})&=k_{21}^{(n)}u^{(1)}(x_1)+k_{22}^{(n)}j^{(1)}(x_1).\end{aligned} \tag{18}$$

Система (18) позволяет находить решение 1, 2, 3 или 4 краевых задач, так как зная какую-либо пару из $u^{(1)}(x_1),\ u^{(n)}(x_{n+1}),\ j^{(1)}(x_1),\ j^{(n)}(x_{n+1})$ можно найти другую пару.

Для решения первой краевой задачи при выполнении $u^{(1)}(x_1)=0,\ u^{(n)}(x_{n+1})=0$ получим условие $k_{12}^{(n)}=0$ для определения собственных значений λ_k.

Для второй краевой задачи, когда $u^{(1)}(x_1)=0,\ j^{(n)}(x_{n+1})=0$, условие для определения собственных значений $k_{22}^{(n)}=0$.

Для третьей краевой задачи ($j^{(1)}(x_1)=0,\ u^{(n)}(x_{n+1})=0$) – условие определения собственных значений $k_{11}^{(n)}=0$.

Для четвертой краевой задачи ($j^{(1)}(x_1)=0,\ j^{(n)}(x_{n+1})=0$) – условие определения собственных значений $k_{21}^{(n)}=0$.

Поиск собственных значений в программе выполняется с помощью процедуры численного отыскания корней соответствующего уравнения.

Чтобы нормализовать базисные функции найдем квадрат нормы

$$N^2=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{1}{a_2^{(i)}}\left(u_k^{(i)}(x)\right)^2dx, \tag{19}$$

где функция $u_k^{(i)}(x)$ вычислена для собственного значения λ_k. Тогда соответствующие собственные функции найдем по формулам $f_k^{(i)}=u_k^{(i)}/N$.

Коэффициенты в разложении Фурье определяются из скалярного произведения

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(x)\frac{1}{a_2^{(i)}}\left(u_k^{(i)}\right)dx. \tag{20}$$

Таким образом, решение уравнения запишется в виде

$$\Phi^{(i)}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k f_k^{(i)}(x)e^{-\lambda_k^2t}. \tag{21}$$

Литература

1. Bers L., Gelbart A. On a class of functions defined by partial differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1944. V. 56. P. 67-93

2. Гладышев Ю.А. Метод обобщенных степеней Берса и его приложение в математической физике. – Калуга: КГУ им. К.Э. Циолковского, 2011. – 204 с.

3. Гладышев Ю.А., Калманович В.В. Операторные методы при решении задачи переноса в многослойной среде // Прикладные задачи математики. Материалы XXIII международной научно-технической конференции. ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет". Севастополь, издательство ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет", 2015, 106-110.

4. Gladyshev Yu.A, Kalmanovich V.V. On some solutions of heat-and-mass transfer equation in multilayer media // The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Moscow, Russia, August 13-20, 2017. International Workshop “Differential Equations and Interdisciplinary Investigations”. Moscow, Russia, August 17-19, 2017: abstracts. – Москва: РУДН, 2017. – 232 с. – С.66.