

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

Якубенко А.П.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия,

andrey.yakubenko@gmail.com

Для получения более точных результатов при определении напряжений и деформаций во вращающихся дисках предлагается использовать кусочно-линейную аппроксимацию условия пластичности. Результаты расчетов показали, что выбор условия пластичности существенно влияет на значения напряжений в диске.

Ключевые слова: вращающийся диск, упругопластический материал, кусочно-линейное условие пластичности

MATHEMATIC MODELLING OF ELASTIC-PLASTIC STATE IN ROTATING DISK

Yakubenko A.P.

Voronezh State University, Voronezh, Russia,

andrey.yakubenko@gmail.com

To obtain more accurate results when determining stress and deformation in rotating disk suggested to use piecewise-linear approximation of plasticity condition. Calculation results show that selection of plasticity condition significantly affects stress values in the disk.

Key words: rotating disk, plastic-elastic material, piecewise-linear plasticity condition.

Вращающиеся диски применяются в газовых турбинах, компрессорах, в машинах химической промышленности [1]. Обзор работ по расчету вращающихся дисков приведен в работе [3].

Рассмотрим осесимметричный тонкий диск постоянной толщины, вращающийся с угловой скоростью ω . Напряжения в диске, находящемся в упругом состоянии, определяются по формулам [1]

$$\sigma_r = A - \frac{B}{\rho^2} - \frac{3+\nu}{8} m \rho^2, \quad \sigma_\theta = A + \frac{B}{\rho^2} - \frac{1+3\nu}{8} m \rho^2, \quad m = \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2 b^2}{k} \quad (1)$$

Здесь ν — коэффициент Пуассона, γ — удельный вес, g — ускорение свободного падения, k — предел пластичности, b — радиус внешнего контура диска. Если полагать, что внешний контур диска свободен от усилий, то условие $\sigma_r(1) = 0$ позволяет получить соотношение

$$A = B + \frac{3+\nu}{8} m.$$

В силу ограниченности величины напряжений ($\sigma_r \neq \infty$), в решении (1) постоянную B надо положить равной нулю ($B = 0$). Тогда

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} m - \frac{3+\nu}{8} m \rho^2, \quad \sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} m - \frac{1+3\nu}{8} m \rho^2. \quad (2)$$

Распределение напряжений в диске, находящемся в упругом состоянии, показано на рис.1.

При возрастании угловой скорости в точках вращающегося диска может наступить пластическое состояние. Рассмотрим условием пластичности максимального приведенного напряжения [2]. Несложно проверить, что пластическая зона зарождается в центре диска, и условие пластичности в окрестности точки $\rho = 0$ будет иметь вид

$$\sigma_{\theta} + \sigma_{\rho} = 2. \quad (3)$$

Предельное значение угловой скорости вращения диска, при которой в точке $\rho = 0$ наступает пластическое состояние, определяется из условия (2) и (3)

$$m \geq 8/(3 + \nu).$$

Обозначим через ρ_s радиус упругопластической границы. Поскольку на упругопластической границе ρ_s компоненты тензора напряжений непрерывны, то, учитывая равенства (1) — (3), находим

$$B = k - \frac{3 + \nu}{8}m + \frac{1 + \nu}{4}m\rho_s^2.$$

Учитывая, что напряжения не могут принимать бесконечные значения, находим, что в области пластического состояния $0 \leq \rho \leq \rho_s$

$$\sigma_{\rho} = 1 - \frac{1}{4}m\rho^2, \quad \sigma_{\theta} = 1 + \frac{1}{4}m\rho^2. \quad (4)$$

Радиус упругопластической границы ρ_s определяется из условия непрерывности, например, компоненты тензора напряжений σ_{θ}

$$\rho_s = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{8 - 2m}{(1 + \nu)m}}}.$$

Если задать радиус упругопластической границы, то можно определить соответствующую угловую скорость диска

$$m = \frac{8}{(1 + \nu)\rho_s^4 - 2(1 + \nu)\rho_s^2 + (3 + \nu)}, \quad \omega = \sqrt{\frac{gm}{\gamma b^2}}.$$

Полученные формулы для напряжений в пластической области остаются справедливыми до тех пор, пока напряженное состояние соответствует условию пластичности

$$\sigma_{\theta} + \sigma_{\rho} = 2.$$

С увеличением параметра m на упругопластической границе напряжения достигнут значений, при которых будет выполняться другое условие пластичности (переход с одного звена кривой пластичности на другое). Этот переход определяется условием

$$\begin{cases} \sigma_{\theta} + \sigma_{\rho} = 2, \\ 2\sigma_{\theta} - \sigma_{\rho} = 2. \end{cases}$$

Предельные значения напряжений, при которых происходит переход к новому условию пластичности,

$$\sigma_{\theta} = 4/3, \quad \sigma_{\rho} = 2/3. \quad (5)$$

Подставляя эти значения напряжений при $\rho = \rho_s$ в (9), получаем соотношение

$$\rho_s^2 = 4/(3m). \quad (6)$$

Исключая ρ_s^2 из системы уравнений (4), (6), находим предельное значение угловой скорости вращения диска, при которой происходит переход к новому условию пластичности

$$m = \frac{4}{3(3+v)}(4+v \pm \sqrt{13+4v}).$$

Обозначим через ρ_1 радиус границы между пластической зоной, в которой выполняется условие пластичности

$$\sigma_\theta + \sigma_\rho = 2 \quad (0 \leq \rho \leq \rho_1)$$

и зоной, в которой выполняется условие пластичности

$$2\sigma_\theta - \sigma_\rho = 2 \quad (\rho_1 \leq \rho \leq \rho_s). \quad (7)$$

Поскольку теперь на упругопластической границе напряжения должны удовлетворять условию (7), величина B , входящая в формулы для напряжений и деформаций в упругой зоне, будет вычисляться по другой формуле

$$B = \frac{(16 - (1 - 5v)m\rho_s^2 - (3 + v)m)\rho_s^2}{8(3 + \rho_s^2)}.$$

В зоне $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_s$ уравнение равновесия с учетом условия пластичности (7) примет вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{1}{2}\sigma_r = k - m\rho^2,$$

решая которое находим

$$\sigma_\rho^2 = \frac{C_1}{\rho^{1/2}} + 2k - \frac{2}{5}m\rho^2.$$

На границе $\rho = \rho_1$ напряжения принимают значения $\sigma_\theta = 4/3$, $\sigma_\rho = 2/3$.

Поэтому $C_1 = -\frac{4\sqrt{2}}{5^4\sqrt{3}m}$ и в области $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_s$

$$\sigma_\rho = -\frac{4\sqrt{2}}{5^4\sqrt{3}m} \frac{1}{\rho^{1/2}} + 2 - \frac{2}{5}m\rho^2, \quad \sigma_\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{5^4\sqrt{3}m} \frac{1}{\rho^{1/2}} + 2 - \frac{1}{5}m\rho^2.$$

Из условия непрерывности радиальной или окружной компоненты тензора напряжений на упругопластической границе следует уравнение для определения радиуса этой границы

$$\frac{4(1 - \rho_s^2)}{8(3 + \rho_s^2)}[(3 + v)m + \rho_s^2(1 - v)m - 16k] + \frac{2}{5}m\rho_s^2 + \frac{4\sqrt{2}}{5^4\sqrt{3}m} \frac{1}{\rho_s^{1/2}} - 2k = 0.$$

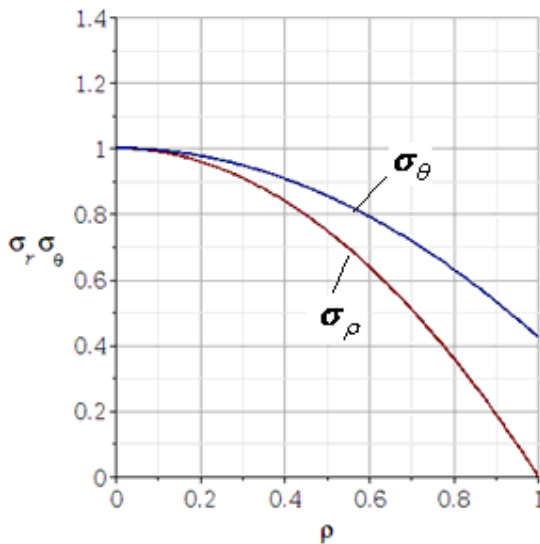


Рис.1

Упругое состояние диска.
 $m = 8/(3 + \nu)$, $\nu = 0,3$

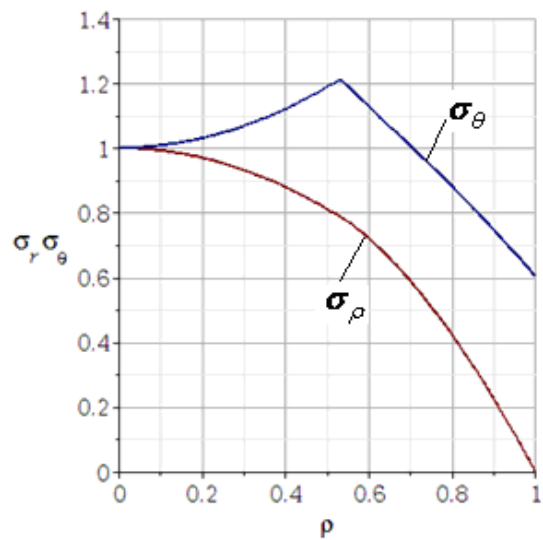


Рис.2

Упругопластическое состояние диска.
 $m = 3$, $\nu = 0,3$

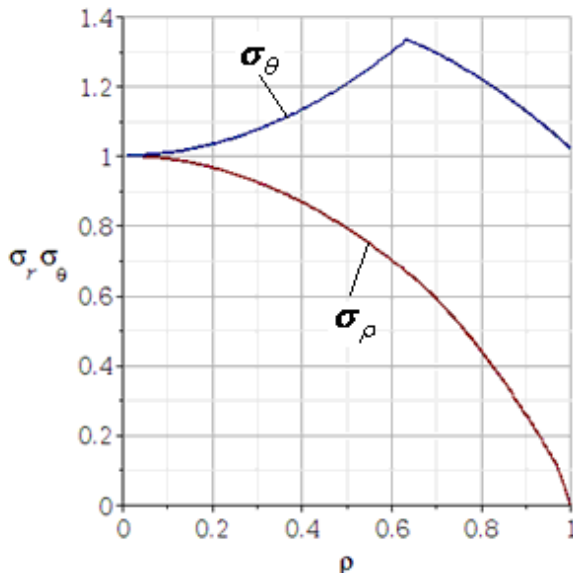


Рис.3

Упругое состояние диска. $m = 3,3$; $\nu = 0,3$

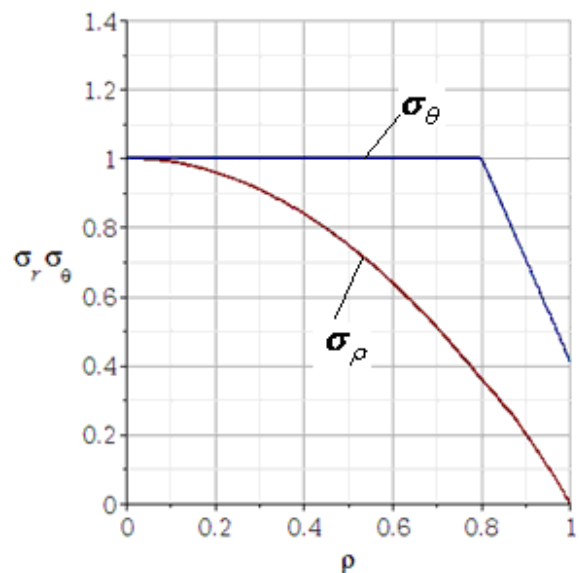


Рис.4рис.

Упругопластическое состояние диска.
 Условие пластичности Треска.

На рис.2, 3, 4 приведены графики напряжений во вращающемся диске, находящемся в упругопластическом состоянии.

Приведенные результаты расчетов показывают, что выбор условия пластичности может существенно влиять на значения напряжений.

Литература

1. Беляев Н.М. Соппротивление материалов. – М.: Наука, 1965. – 856 с.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
3. Ma, G., Hao, H., and Miyamoto, Y., 2001, "Limit Angular Velocity of Rotating Disc With Unified Yield Criterion," Int. J. Mech. Sci., 43, pp. 1137–1153.