



Прямой вариационный алгоритм усвоения данных сети мониторинга состава атмосферы с учетом пространственных производных функции неопределенности

Пененко А.В., Пененко В.В., Мукатова Ж.С.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН

Новосибирск 2018

Иерархия задач и вычислительная сложность



Необходимо гибкое управление сложностью подзадач

Система моделирования химического состава атмосферы



Постановка задачи усвоения данных

- **Многомерные модели переноса примесей**

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \vec{u} - \mu \operatorname{grad} \varphi) = f + r, \quad \{\vec{x}, t\} \in D \times [0, T],$$

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} + \beta \varphi = g, \quad \{\vec{x}, t\} \in \partial D_{out} \subset \partial D \times [0, T],$$

$$\varphi = g, \quad \{\vec{x}, t\} \in \partial D_{in} \subset \partial D \times [0, T],$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi^0, \quad \vec{x} \in D.$$

- **Оператор измерений**

$$\vec{I} = \mathbf{H}(\vec{\varphi}) + \vec{\eta},$$

- **Параметры:** метеорологические \vec{u}, μ , априорные источники \vec{f} , краевые и начальные условия $\vec{g}, \vec{\varphi}^0$.

- **Функции неопределенности (управления)** $\vec{r}, \vec{\eta}$, $\|\vec{\eta}\| = \delta$.

- **Прямая задача:** Даны параметры и $\vec{r}, \vec{\eta}$, требуется найти $\vec{\varphi}, \vec{I}$.

- **Задача усвоения данных:** Для последовательности $\{t_k^*\}_{k=1}^{N_{DA}} \in [0, T]$ найти $\vec{\varphi}, \vec{r}$ по данным \vec{I} для $t \leq t_k^*$ (на каждом шаге формулируется обратная задача)

Расщепление и усвоение данных

• Усвоение в расщепленную модель как целое (общий функционал)

$$J(\vec{\phi}(t^{j+1}), r^{j+1}) = \|H\vec{\phi}(t^{j+1}) - \Psi^j\|^2 + \alpha \|r^{j+1}\|^2$$

$$\begin{cases} \gamma_\xi \frac{\partial \vec{\phi}_d}{\partial t} + L_\xi \vec{\phi}_\xi = \gamma_\xi \vec{f} + \gamma_\xi \vec{r}, \\ \vec{\phi}_\xi(t^j) = \vec{\phi}(t^j), \quad \xi \in \{x, y, z\}. \\ \vec{\phi}(t^j) = \sum_{\xi \in \{x, y, z\}} \gamma_\xi \vec{\phi}_\xi(t^j). \end{cases}$$

Связаны, требует итераций

$$\begin{cases} 2\gamma_\xi H^* (H(\phi^j) - I^j) + \gamma_\xi \frac{\psi_\xi^j}{\tau} - L_\xi^* \psi_\xi^j = 0, \\ \frac{\phi_\xi^j - \phi^{j-1}}{\tau} = L_\xi \phi_\xi^j + \gamma_\xi r^j, \end{cases}$$

$$\xi \in \{x, y, z\},$$

$$\nabla_{r^j} J(\phi^j, r^j) = 2\alpha r^j - \sum_{\xi \in \{x, y, z\}} \gamma_\xi \psi_\xi^j = 0,$$

• Усвоение на отдельных стадиях расщепления (независимые функционалы)

$$J_d(\vec{\phi}_\xi(t^{j+1}), \vec{r}_\xi^{j+1}) = \|H\phi_\xi(t^{j+1}) - I^j\|^2 + \alpha \|\vec{r}_\xi^{j+1}\|^2$$

$$\begin{cases} \gamma_\xi \frac{\partial \vec{\phi}_\xi}{\partial t} + L_\xi \vec{\phi}_\xi = \gamma_\xi \vec{f} + \vec{r}_\xi, \quad \vec{\phi}_\xi(t^j) = \vec{\phi}(t^j) \end{cases}$$

$$\xi \in \{x, y, z\}, \quad \vec{\phi}(t^j) = \sum_{\xi \in \{x, y, z\}} \gamma_\xi \vec{\phi}_\xi(t^j).$$

Решаются независимо (прямым алгоритмом)

$$\begin{cases} 2H^* (H\phi_\xi^j - I^j) + \gamma_\xi \frac{\psi_\xi^j}{\tau} - L_\xi^* \psi_\xi^j = 0 \\ \gamma_\xi \frac{\phi_\xi^j - \phi^{j-1}}{\tau} = L_\xi \phi_\xi^j + r_\xi^j, \quad \xi \in \{x, y, z\} \\ 2\alpha r_\xi^j - \psi_\xi^j = 0, \end{cases}$$

1. Пененко А., Пененко В. Прямой метод вариационного усвоения данных для моделей конвекции-диффузии на основе схемы расщепления // **Выч. тех.** — 2014. — Т. 19, № 4. — С. 69–83.
2. Penenko, A. Comparison between combinations of the splitting and the variational data assimilation schemes for atmospheric chemistry transport models // **Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Numerical Analysis**, 2015, 17, 43-52

Прямые алгоритмы вариационного усвоения данных для процессов переноса

Минимум целевого функционала

$$J(\phi^j, r^j) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{\phi_i^j - I_i^j}{\sigma_i} \right)^2 M_i^j + \rho \sum_{i=0}^N (r_i^j)^2 + \eta \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{r_{i+1}^j - r_i^j}{\Delta x} \right)^2 \rightarrow \min$$

на ограничениях: $-L_i \phi_{i-1}^j + C_i \phi_i^j - R_i \phi_{i+1}^j = \phi_i^{j-1} + \tau f_i^j + \tau r_i^j, \quad i = 1, \dots, N$

дается решением трех-диагональной матричной СЛАУ (с матрицами 2x2 и 3x3)

$$-\tilde{R}_i \Phi_{i+1}^j + \tilde{C}_i \Phi_i^j - \tilde{L}_i \Phi_{i-1}^j = F_i^j, \quad \Phi_i^j = \begin{pmatrix} \phi_i^j \\ \phi_i^{*j} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, N,$$

которая решается методом матричной прогонки (без итераций).

- Связь между результатом работы алгоритма и решением задачи усвоения данных (воспроизведение данных, функции состояния, источника):** Пененко А. Пененко В., Цветова Е. Последовательные алгоритмы усвоения данных в моделях мониторинга качества атмосферы на базе вариационного принципа со слабыми ограничениями // *Сиб. журн. вычисл. матем.*, 2016, 19, С. 401-418.
- Обобщение на нелинейный случай:** Гришина А. А., Пененко А. В. Моделирование кинетики химических реакций с использованием схем вариационного усвоения данных // *Вычислительные технологии*, 2017, 22, 27-43
- Обобщение на случай стабилизатора с производной функции управления:** Penenko, A.; Penenko, V. & Mukatova, Z. Direct data assimilation algorithms for advection-diffusion models with the increased smoothness of the uncertainty functions // 2017 International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), 2017, 126-130.

Сценарий усвоения данных городской сети мониторинга

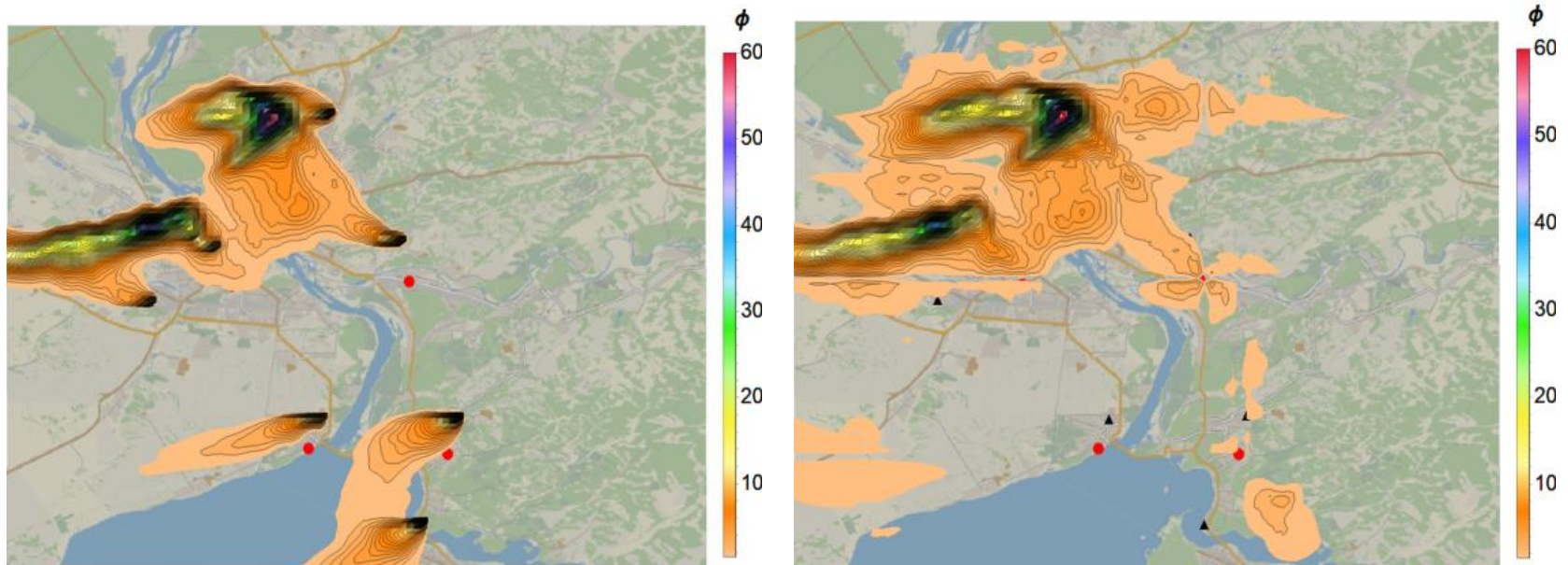


Рис. «Точное» решение (слева), результат усвоения данных (справа) для сети мониторинга г. Новосибирска.

1. **Новосибирский сценарий для стабилизатора с нормой функции управления:** Пененко, В. В.; Пененко, А. В. & Цветова, Е. А. Вариационный подход к исследованию процессов геофизической гидротермодинамики с усвоением данных наблюдений // Прикладная механика и техническая физика, Publishing House SB RAS, 2017, 58, 17-25.
2. **Новосибирский сценарий для стабилизатора с нормой производной функции управления:** А.В. Пененко, Ж.С. Мукатова, В.В. Пененко, А.В.Гочаков, П.Н. Антохин Численное исследование прямого вариационного алгоритма усвоения данных в городских условиях // Оптика атмосферы и океана (положительное рецензирование).

Сценарий усвоения данных городской сети мониторинга

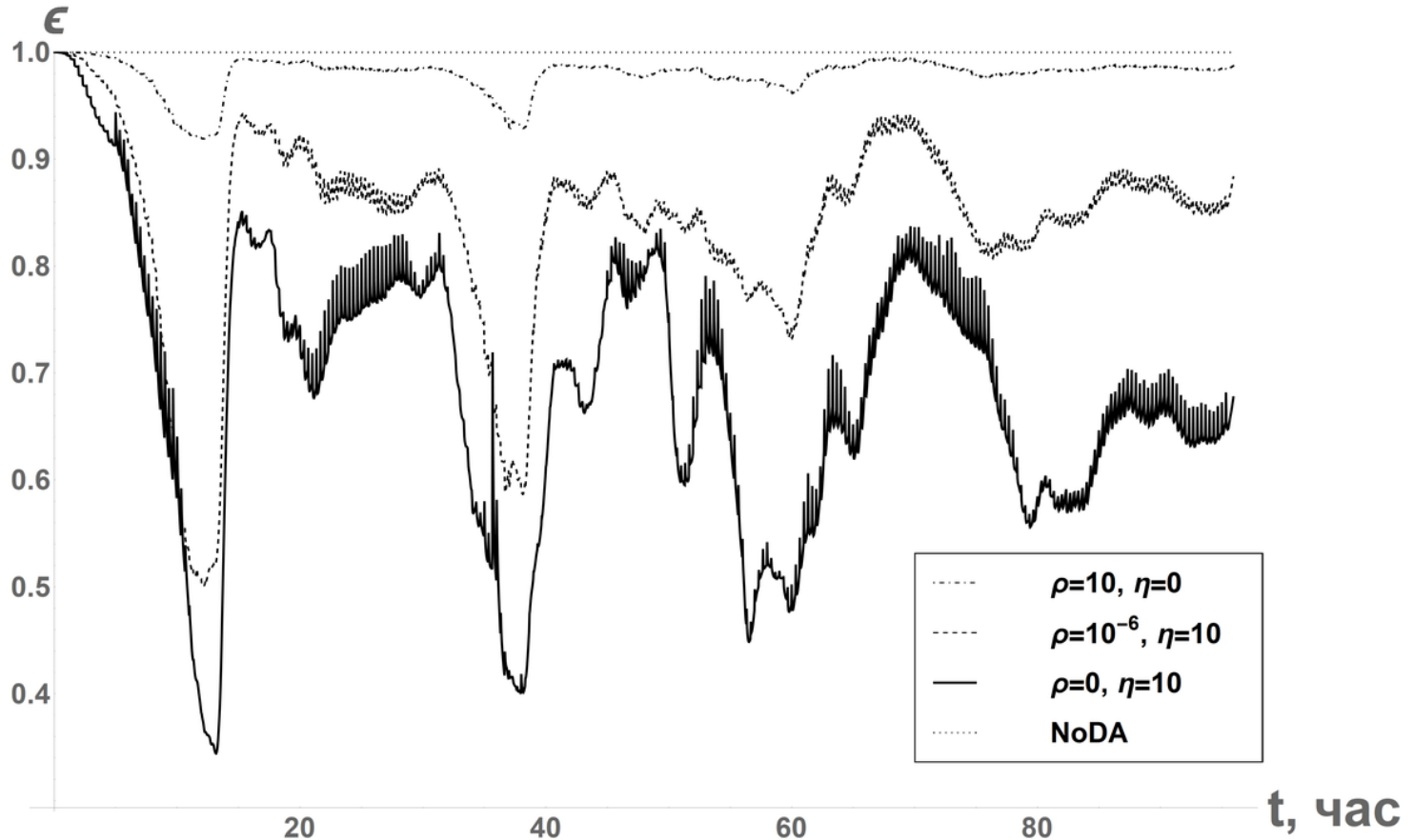


Рис. Относительная ошибка в зависимости от времени для различных параметров регуляризации.

1. Новосибирский сценарий для стабилизатора с нормой производной функции управления: А.В. Пененко, Ж.С. Мукатова, В.В. Пененко, А.В.Гочаков, П.Н. Антохин Численное исследование прямого вариационного алгоритма усвоения данных в городских условиях // Оптика атмосферы и океана (положительное рецензирование).

Заключение

- 1. Задача усвоения данных рассматривается как последовательность связанных обратных задач с различными наборами данных измерений. Решения предыдущих являются априорной информацией для следующих.**
- 2. Разработана схема вариационного усвоения данных на основе метода расщепления для модели адвекции-диффузии-реакции.**
- 3. Для модели адвекции-диффузии разработан прямой алгоритм решения задачи вариационного усвоения данных контактных измерений.**
- 4. Разработанные алгоритмы использованы для решения практически-важных задач в областях моделирования химии атмосферы.**



Спасибо за внимание!