Инструкция по работе с программой

Численный метод решения совмещенной обратной задачи для уравнений мелкой воды.

В настоящей работе приведена программа, предназначенная для вычисления формы начального возмущения $q(x,y)$ водной поверхности в задаче распространения длинных волн в мелкой воде

$$\begin{cases} \eta_{tt} = div\left(gH(x,y)\,grad\,\eta\right), & t>0, \\ \eta(x,y,0)=q(x,y),\ \ \eta_t(x,y,0)=0, & (x,y)\in\Omega:=(0,L_x)\times(0,L_y), \\ \eta\big|_{\partial\Omega}=0. \end{cases} \tag{1}$$

по двум типам данных:

(1) точечные измерения отклонения водной поверхности от состояния равновесия

$$\eta(x_m,y_m,t)=f_m(t), \quad (x_m,y_m)\in\Omega, \ \ m=1,...,M, \tag{2}$$

(2) и измерения отклонения водной поверхности в фиксированный момент времени на части области $\omega\subseteq\Omega$

$$\eta(x,y,T)=f(x,y), \quad \omega\subseteq\Omega,\ \ \omega:=(l_x^{(1)},l_x^{(2)})\times(l_y^{(1)},l_y^{(2)}). \tag{3}$$

В программе (на усмотрение пользователя) могут быть решены три обратные задачи определения функции $q(x,y)$ из класса $q(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{K} q_k(x)\sin\frac{2\pi k y}{L_y}$ из системы (1) по данным

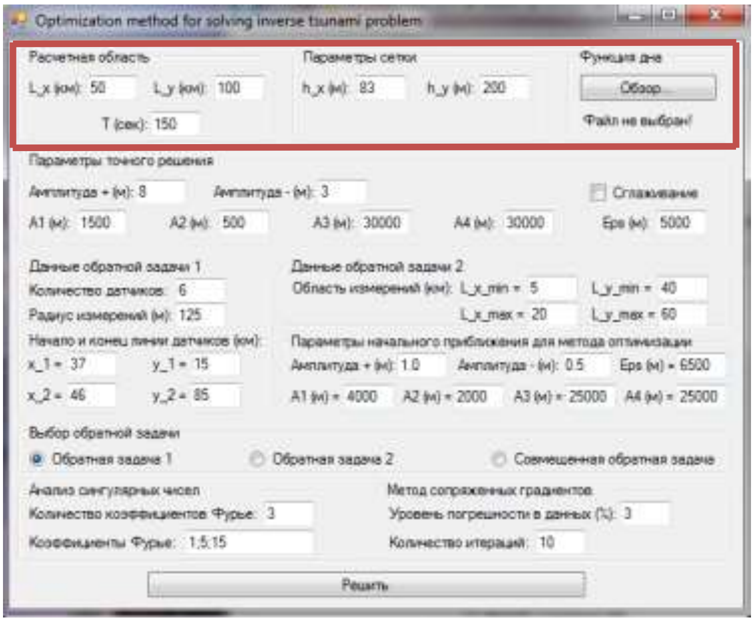
- вида (2) – *обратная задача 1* [1];
- вида (3) – *обратная задача 2* [2];
- совмещенным данным (2) + (3) – *совмещенная обратная задача* [3].

Для анализа некорректности обратных задач для фиксированного коэффициента Фурье k применяется метод сингулярного разложения матриц дискретных аналогов операторов обратных задач 1, 2 и совмещенной обратной задачи. Характер убывания сингулярных чисел показывает степень некорректности задачи: чем больше стремление к нулю сингулярных чисел, тем выше степень некорректности соответствующей обратной задачи.

Шаг 1. Запускаем файл *Interface_CombinedITP.exe*. Заполняем параметры области Ω в километрах (L_x и L_y), время вычислений распространения волны в секундах (T) так, чтобы волна не успела дойти до границ области Ω. Задаем параметры равномерной сетки в километрах (h_x и h_y) и функцию, описывающую рельеф дна в километрах $H(x,y)$ в файле в виде

$$\begin{array}{ccc} x_0 & y_0 & H_{00} \\ x_0 & y_1 & H_{01} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0 & y_{N_y} & H_{0N_y} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_x} & y_0 & H_{N_x 0} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{N_x} & y_{N_y} & H_{N_x N_y} \end{array} \tag{4}$$

Здесь $N_x = L_x / h_x$, $N_y = L_y / h_y$.



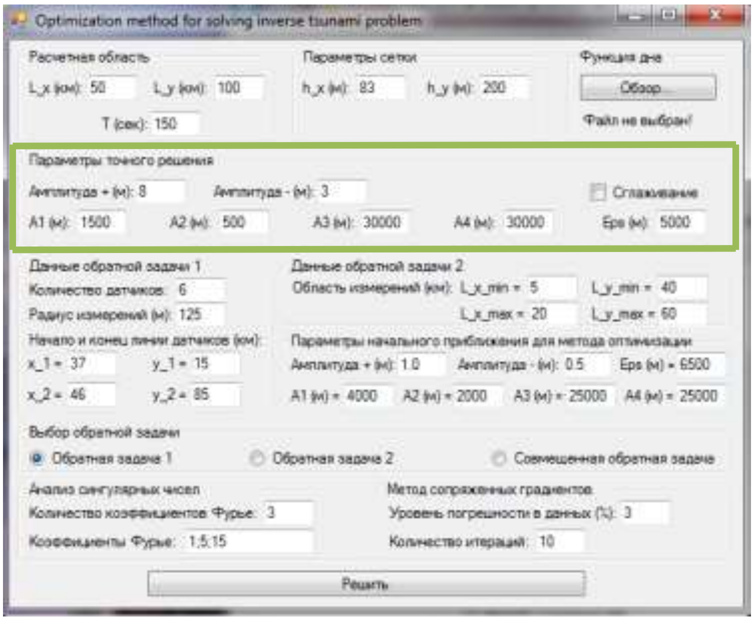
Шаг 2. Задаем параметры точного решения $q_T(x,y) = H_{\max} + q_1(x)\cdot q_2(y)$, где

$$q_1(x) = \begin{cases} 0.5A_+\left(\cos\frac{\pi(2x-L_x+A_1)}{A_1}+1\right), & x\in\left(\frac{L_x}{2}-A_1,\frac{L_x}{2}\right), \\ -0.5A_-\left(\cos\frac{\pi(2x-L_x-A_2)}{A_2}+1\right), & x\in\left(\frac{L_x}{2},\frac{L_x}{2}+A_2\right); \end{cases}$$

$$q_2(y) = \begin{cases} 0.5\left(\sin\frac{\pi(y-(\varepsilon+L_y)/2+A_3)}{\varepsilon}+1\right), & x\in\left(\frac{L_y}{2}-A_3,\frac{L_y}{2}-A_3+\varepsilon\right), \\ 1, & x\in\left(\frac{L_y}{2}-A_3+\varepsilon,\frac{L_y}{2}+A_4-\varepsilon\right), \\ 0.5\left(\sin\frac{\pi(y+(\varepsilon-L_y)/2-A_4)}{\varepsilon}+1\right), & x\in\left(\frac{L_y}{2}+A_4-\varepsilon,\frac{L_y}{2}+A_4\right). \end{cases} \quad (5)$$

Здесь A_+ - амплитуда поднятия начального возмущения (в программе «Амплитуда + (м)»), A_- - амплитуда опускания начального возмущения (в программе «Амплитуда - (м)»), $H_{\max}$ - наибольшая средняя глубина водоема.

Также пользователь может сгладить полученное возмущение (сглаживание по 3-м точкам в каждом направлении), поставив галочку в пункте «Сглаживание».

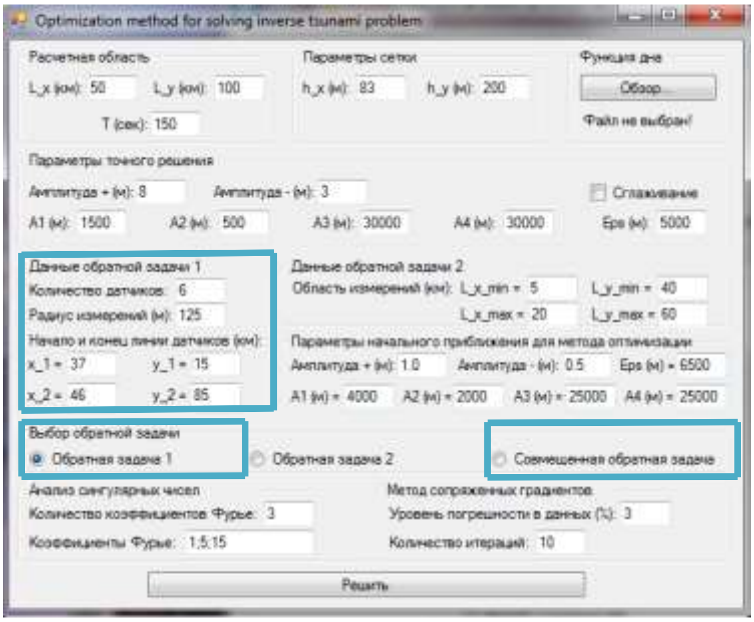


Шаг 3. Выбираем тип обратной задачи 1, 2 или совмещенная. При выборе «Обратная задача 1» или «Совмещенная обратная задача» заполняем данные обратной задачи 1:

- количество датчиков *M;*

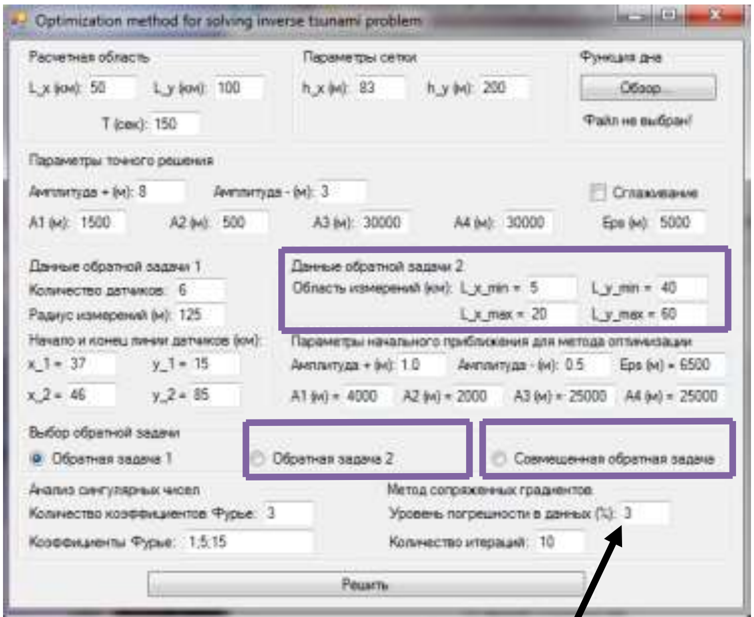
- радиус измерения датчика в метрах (малая окрестность, в которой измерения предполагаются известными);

- начало (x_1, y_1) и конец (x_2, y_2) линии расположения датчиков в области Ω.



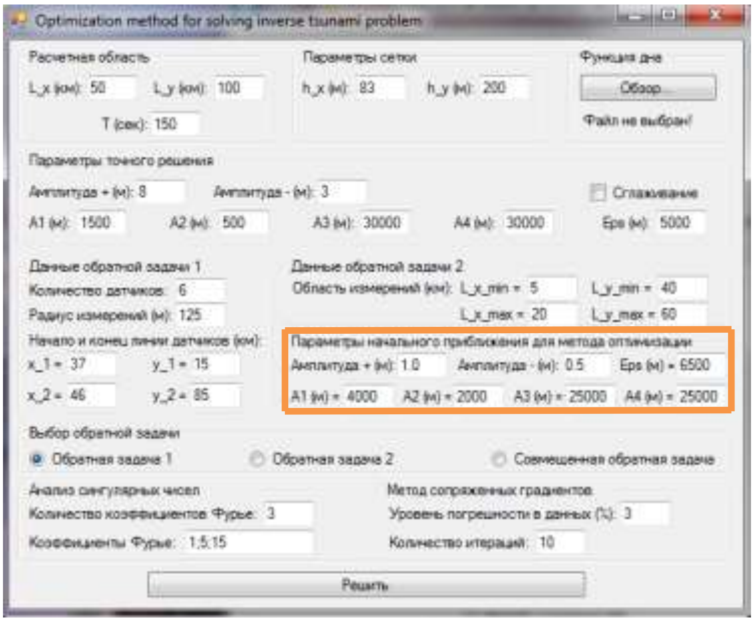
При выборе «Обратная задача 2» или «Совмещенная обратная задача» заполняем данные обратной задачи 2:

- область $\omega \subseteq \Omega$.

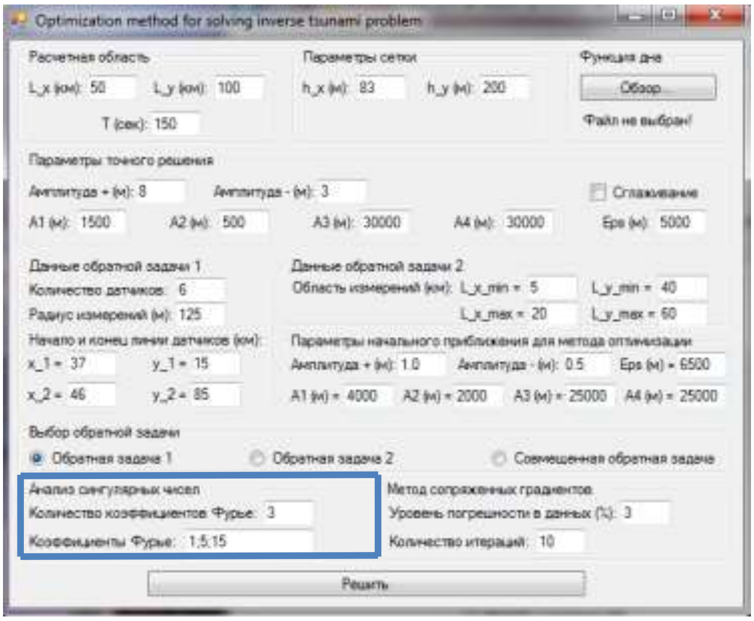


В данные можно внести уровень погрешности в виде белого шума, задав его в процентах. Отметим, что одна и та же погрешность соответствует данным вида (2) и (3).

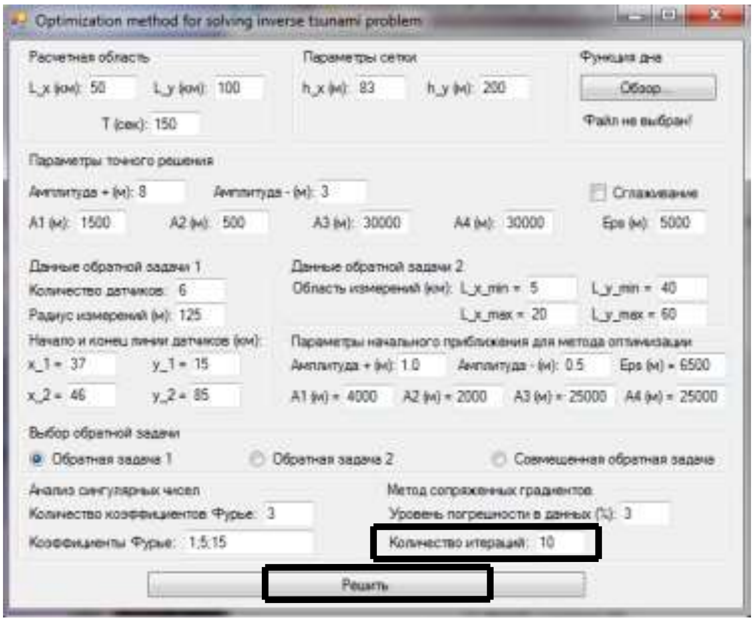
Шаг 4. Задаем начальное приближение $q_0(x, y)$ для метода сопряженных градиентов, аналогично заданию точного решения $q_T(x, y)$ с использованием формул (5).



Шаг 5. Задаем количество коэффициентов Фурье k и номера коэффициентов Фурье через «;» для вычисления сингулярных чисел выбранной обратной задачи.



Шаг 6. Задаем количество итераций для метода сопряженных градиентов $q_{n+1} = q_n - \alpha_n p_n$, $p_0 = J'q_0$, где параметр спуска α_n и направление спуска p_n высчитываются по общеизвестным формулам [1]-[3], и нажимаем кнопку «Решить».



Выходные данные – файлы вида (4):

1. Точное решение обратной задачи (начальное возмущение) $q_T(x,y)$ *Model_InitSurf.dat*.
2. Данные обратной задачи:
   a. При выборе «Обратная задача 1»: файл *Model-DART.dat* с координатами датчиков, файл *Model_f_DART.dat* данных вида (2), записанный по столбцам $t \quad f_1(t) \quad \cdots \quad f_M(t)$.
   b. При выборе «Обратная задача 2»: файл *Model_f_Dirichlet.dat* данных вида (3).
   c. При выборе «Совмещенная обратная задача»: файлы из пунктов 2a и 2b.
3. Начальное приближение для метода сопряженных градиентов $q_0(x,y)$ *Model_InitSurf_approx.dat*.
4. Приближенное решение обратной задачи (начальное возмущение) $q_n(x,y)$, полученное в результате применения метода сопряженных градиентов *Model_InitSurf_reconstruct_ConjM.dat*. Для удобства выводятся одномерные срезы полученного решения при $y = L_y/2$ на начальных итерациях *n=0,3,5,7,10,15* *Model_InitSurf_1D_n=….dat* и конечной итерации *Model_InitSurf_1D_end.dat*.
5. Норма невязки (файлы устроены как «$n \quad \|\cdot\|$»):
   a. Для обратной задачи 1: $\|\eta(x_m, y_m, \cdot; q_n) - f_m(\cdot)\|_{L_2(0,T)}$ в файле *NormE_DART.dat.*
   b. Для обратной задачи 2: $\|\eta(\cdot,\cdot,T; q_n) - f(\cdot,\cdot)\|_{L_2(\Omega)}$ в файле *NormE_Dirichlet.dat.*
   c. Для совмещенной обратной задачи: $\|\eta(x_m, y_m, \cdot; q_n) - f_m(\cdot)\|_{L_2(0,T)} + \|\eta(\cdot,\cdot,T; q_n) - f(\cdot,\cdot)\|_{L_2(\Omega)}$ в файле *NormE_Common.dat.*
6. Энергетическая норма $\left| \iint_\Omega q_n(x,y)\,dxdy - \iint_\Omega q_T(x,y)\,dxdy \right|$ в файле *NormEnergy.dat*.
7. Относительная погрешность $\|q_n - q_T\|_{L_2(\Omega)} / \|q_T\|_{L_2(\Omega)}$:
   a. Обратная задача 1: *NormQ_DART.dat*.
   b. Обратная задача 2: *NormQ_Dirichlet.dat*.
   c. Совмещенная обратная задача: *NormQ_Common.dat*.

8. Сингулярные числа дискретного аналога оператора обратной задачи 1 (*Singular_values_Dart.dat*), обратной задачи 2 (*Singular_values_Dirichlet.dat*) и совмещенной обратной задачи (*Singular_values_Common.dat*). Формат файлов: номер сингулярного числа, синг.число для k_1, синг.число для k_2, …, синг.число для k_K. Здесь K – количество заданных коэффициентов Фурье.

Замечание 1. Файл *OMITP.exe* является расчетным и запускается автоматически после нажатия кнопки «Решить». Запускать отдельно его НЕ РЕКОМЕНДУЕТСЯ!

Замечание 2. Для удобства просмотра графиков в формате **.eps* используется программа Gnuplot. Файлы *Plot2D.plt* и *Plot3D_result.plt* генерируют двумерные и трехмерные графики выходных данных, соответственно. Отметим, что данные файлы записаны для примера, установленного по умолчанию в программе; при замене примере нужно внутри этих файлов изменить записываемые названия по аналогии.

Список литературы:

[1] S.I. Kabanikhin, M.A. Bektemesov, D.B. Nurseitov, O.I. Krivorotko, A.N. Alimova. An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, V. 20, N. 2, 2012, pp. 193-211.

[2] S.I. Kabanikhin, A. Hasanov, I.V. Marinin, O.I. Krivorotko, D. Khidasheli. A variational approach to reconstruction of an initial tsunami source perturbation // Applied Numerical Mathematics, V. 83, 2014, pp. 22-37.

[3] S.I. Kabanikhin, O.I. Krivorotko. Optimization approach to combined inverse tsunami problem // Proceedings conference Inverse Problems – from Theory to Applications (IPTA2014), Bristol, UK, 26-28 August, 2014, pp. 102-107.