

Инструкция по работе с программой

"Численный метод решения задачи определения параметров математической модели распространения туберкулеза с лечением и возникновением лекарственной устойчивых штаммов"

Содержание

1	Постановка задачи	1
2	Описание алгоритма	4
2.1	Метод отжига	4
2.2	Градиентный метод	5
3	Описание работы с программой	7
4	Пример применения программы	10
	Литература	13

Введение

Вашему вниманию предлагается инструкция по работе с программой по численному решению задачи определения набора параметров (обратная задача) для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих распространение туберкулеза в популяции с учетом лечения и возникновения новых лекарственно устойчивых штаммов.

1 Постановка задачи

Разработана программа, предназначенная для численного решения обратной задачи для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих распространения туберкулеза в популяции с учетом лечения и возникновения новых лекарственно устойчивых штаммов [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Pi N + \varphi T + \varphi_m T_m - (\lambda_d + \lambda_{dm} + \mu) S_B, \\ \frac{dL_A}{dt} = \lambda S_A + \lambda_d (S_B + L_B + L_{Bm}) - (\varepsilon + k + \mu) L_A, \\ \frac{dL_{Am}}{dt} = \lambda_m S_A + \lambda_{dm} (S_B + L_B + L_{Bm}) - (\varepsilon + k + \mu) L_{Am}, \\ \frac{dL_B}{dt} = k L_A + \gamma I - (\lambda_d + \lambda_{dm} + \nu + \mu) L_B, \\ \frac{dL_{Bm}}{dt} = k L_{Am} + \gamma I_m - (\lambda_d + \lambda_{dm} + \nu + \mu) L_{Bm}, \\ \frac{dI}{dt} = \varepsilon L_A + \nu L_B + (1 - \nu) \omega T - (\gamma + \delta + \mu_i) I, \\ \frac{dI_m}{dt} = \varepsilon L_{Am} + \nu L_{Bm} + \nu \omega T - (\gamma + \delta_m + \mu_i) I_m, \\ \frac{dT}{dt} = \delta I - (\varphi + \omega + \mu_t) T, \\ \frac{dT_m}{dt} = \delta_m I_m - (\varphi_m + \omega + \mu_t) T_m, \\ S(0) = S_0, L_A(0) = L_{A_0}, L_{Am}(0) = L_{Am_0}, \\ L_B(0) = L_{B_0}, L_{Bm}(0) = L_{Bm_0}, I(0) = I_0, I_m(0) = I_{m_0}, \\ T(0) = T_0, T_m(0) = T_{m_0}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь

$$\lambda_d = \chi \beta (I + oT) / N, \quad \lambda_{dm} = \chi \beta_m (I_m + oT_m) / N.$$

В модели (1) вся популяция разделена на чувствительных (S), носителей латентной инфекции, также со штаммом МЛУ-ТБ (с индексом m), с быстрым

(L_A, L_{A_m}) и медленным (L_B, L_{B_m}) развитием активной формы болезни, больных с открытой формой болезни, находящихся на лечении (T, T_m) и нет (I, I_m) .

Описание параметров, характеризующих особенности популяции и развития болезни для модели (1), приведено в таблице 1.

Таблица 1: Параметры модели (1).

Обозначение	Описание	Единицы	Величина
Π	приток молодежи в модельную популяцию	чел/год	зависит от популяции
$1/\mu$	средняя ожидаемая продолжительность жизни	год	зависит от популяции
φ	скорость лечения от туберкулеза	чел/год	2
φ_m	скорость лечения от МЛУ-ТБ	чел/год	0.5
ε	скорость раннего прогрессирования болезни	год	0.129
k	скорость перехода к позднему прогрессированию болезни	год	0.821
γ	скорость спонтанного самоизлечения	год	0.63
ν	скорость развития активной формы болезни при эндогенной активации	год	0.075
η	вероятность развития штамма МЛУ-ТБ при лечении	-	0.035
ω	скорость ре-инфекции	чел/год	0.25
δ	скорость обнаружения индивидов с активной формой туберкулеза	чел/год	0.72
δ_m	скорость обнаружения индивидов с активной формой МЛУ-ТБ	чел/год	0.035
μ_i	смертность от туберкулеза без лечения	год	0.37
μ_t	смертность от туберкулеза во время лечения	год	$0.5\mu_i$
β	параметр контагиозности	-	зависит от популяции

Продолжение табл.1

Величина	Описание	Единицы	Значение
β_m	параметр контагиозности для МЛУ-ТБ	-	0.7β
χ	параметр частичного иммунитета, умноженный на долю инфекции	-	0.343
o	параметр заразности индивидов во время лечения	-	0.6
N	общее количество населения	чел	зависит от популяции

Отметим, что решение задачи Коши (1) существует и единственно в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций [2].

Запишем модель (1) в векторном виде:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t), \Theta), & t \in (0, T), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $X = (S, L_A, L_{Am}, L_B, L_{Bm}, I, I_m, T, T_m)^T$ - вектор неизвестных функций модели, $X_0 = (S_0, L_{A0}, L_{Am0}, L_{B0}, L_{Bm0}, I_0, I_{m0}, T_0, T_{m0})^T$ - вектор начальных данных, F - заданная вектор-функция, а $\Theta = (\Pi, \mu, \varphi, \varphi_m, \varepsilon, k, \gamma, \nu, \eta, \omega, \delta, \delta_m, \mu_i, \mu_t, \beta, \beta_m, \chi, o, l)^T$ - вектор параметров модели.

Предположим, что в моменты времени t_k о функциях $X_{l_1}(t), \dots, X_{l_d}(t)$ где $\{l_1, \dots, l_d\} \subset \{1, \dots, 9\}$ известна дополнительная информация вида:

$$\begin{aligned} X_{l_1}(t_k) &= X_{l_1}^k, & k = 1, \dots, K_{l_1}, \\ &\dots \\ X_{l_d}(t_k) &= X_{l_d}^k, & k = 1, \dots, K_{l_d}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тем самым получили задачу восстановления параметров математической модели (2)-(3), в которой требуется определить вектор из m параметров $\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}_1, \dots, \tilde{\Theta}_m)^T \in \mathbb{R}^m, m \leq 19$ по дополнительной информации о решении прямой задачи:

$$\Phi_i(t_k) := \Phi_i^{(k)} = \left(X_{l_i}^1, \dots, X_{l_i}^{K_{l_i}} \right)^T \in \mathbb{R}^{K_{l_i}}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Запишем обратную задачу (2)-(3) в векторном виде:

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t), \tilde{\Theta}), & X(0) = X_0, \\ X_{l_i}(t_k) = \Phi_i^{(k)}, & i = 1, \dots, d. \end{cases} \quad (4)$$

Решение задачи (4) сводится к нахождению минимума целевого функционала

$$J(\tilde{\Theta}) = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^{K_{l_i}} |X_{l_i}(t_k; \tilde{\Theta}) - \Phi_i^{(k)}|^2. \quad (5)$$

2 Описание алгоритма

Алгоритм решения обратной задачи состоит из комбинации оптимизационных методов: стохастического (метода имитации сверхбыстрого отжига) [3] и детерминистского градиентного метода (минимальных ошибок) [4].

Сначала мы находим область "глобального" минимума функции из любого начального приближения из области определения вектора параметров с помощью метода отжига, после этого, используя начальное приближение из найденной области "глобального" минимума, используем метод градиентного спуска для поиска самого "глобального" минимума функции.

2.1 Метод отжига

Для нахождения области глобального минимума целевого функционала используется метод "сверхбыстрого отжига" (Very Fast Annealing) с коэффициентом c для более быстрого понижения температуры $T(j+1) = cT(j)$ [3]. Этот метод также носит название метода «тушения». В нашем случае, температура $T(j)$ - это некоторая функция натурального аргумента со значением в \mathbb{R}^m , которая регулирует номер итерации.

Суть метода «тушения» заключается в поиске области глобального минимума с помощью упорядоченного случайного поиска, построенного по аналогии с процессом образования кристаллической структуры с минимальной энергией при охлаждении [3].

Предположим, что каждый параметр $\Theta_i, i = 1, \dots, m$, лежит в некотором промежутке $\Theta_i \in [A_i, B_i], i = 1, \dots, m$.

Алгоритм метода тушения:

0. Задаются максимальное и минимальное значения:

$$T_0 = T_{max} \text{ и } T_{min}.$$

1. Произвольным образом выбирается вектор $\Theta_{(0)} \in \mathbb{R}^m : \Theta_{(0)_i} \in [A_i, B_i]$, и вычисляется значение функционала $J(\Theta_{(0)})$.

2. Пусть значения $\Theta_{(j)}$ и $J(\Theta_{(j)})$ уже найдены. Покажем, как вычисляется $\Theta_{(j+1)}$.

3. Задаются m независимых случайных чисел $\alpha_i, i = 1, \dots, m$, равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$. Вычисляется новый вектор Θ' по правилу

$$\Theta'_i = \Theta_{(j)_i} + z_i(B_i - A_i),$$

где z_i - случайная величина следующего вида:

$$z_i = \text{sgn}(\alpha_i - 0.5)T(j)((1 + 1/T(j))^{2\alpha_i - 1} - 1).$$

4. Вычисляется значение функционала в новой точке $J(\Theta')$.

(а) Если $\Delta J = J(\Theta') - J(\Theta_{(j)}) < 0$, то переходим на шаг 7.

(б) Если $\Delta J = J(\Theta') - J(\Theta_{(j)}) > 0$, то переходим на шаг 5.

5. Вычисляется вероятность выбора нового приближения

$$p(\Delta J, T(j)) = \exp(-\Delta J/T(j)).$$

6. Задается случайное число α равномерно распределенное на отрезке $[0,1]$.

(а) Если $\alpha < p(\Delta J, T(j))$, то переходим на шаг 7.

(б) Если $\alpha > p(\Delta J, T(j))$, то переходим на шаг 3.

7. Выбирается новая точка $\Theta_{(j+1)} = \Theta'$.

8. Уменьшается $T(j+1) = cT_0 \exp(-k^{1/m}d)$, $d > 0$ - параметр метода "сверхбыстрого отжига".

(а) Если $T(j+1) < T_{min}$, то конец итерации.

(б) Если $T(j+1) < T_{min}$, то переходим на шаг 3.

В работе Жиглявского А.А. [5] доказана общая теорема о статистической сходимости методов глобальной оптимизации к области глобального минимума. Доказательство этой теоремы для метода сверх-быстрого тушения приведено в работах [5, 6, 7, 8].

2.2 Градиентный метод

После нахождения области глобального минимума функции, запускается метод градиентного спуска с начальным приближением $\Theta_{(0)}$, принадлежащим этой области.

Метод градиентного спуска - метод нахождения локального экстремума функции с помощью движения вдоль градиента, по формуле:

$$\Theta_{j+1} = \Theta_j - \alpha_j J'(\Theta_j), \quad \alpha_j > 0. \quad (6)$$

Здесь α_j - параметр оптимизации, который классифицирует градиентные методы [4], $J'(\Theta) \in \mathbb{R}^m$ - градиент целевого функционала (5).

Теорема 1. *Градиент целевого функционала $J(\Theta)$ определяется следующим соотношением:*

$$J'(\Theta) = - \int_0^T \Psi(t)^T F_{\Theta}(X(t), \Theta) dt. \quad (7)$$

Здесь $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \dots, \Psi_n(t))^T$, $\Psi_i(t) \in C(0, T)$ ($i = 1, \dots, n$) - решение сопря-

женной задачи

$$\begin{cases} \frac{d\Psi(t)}{dt} = -F_X^T(X(t), \Theta)\Psi(t), & t \in \bigcup_{k=0}^K (t_k, t_{k+1}), \quad t_0 = 0, \quad t_{K+1} = T; \\ \Psi(T) = 0, \\ [\Psi]_{t=t_k} = 2(X(t_k; \Theta) - \Phi^{(k)}), & k = 1, \dots, K. \end{cases} \quad (8)$$

$F_X(X(t), \Theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $F_\Theta(X(t), \Theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ – соответствующие матрицы Якоби:

$$F_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial X_1} & \frac{\partial F_N}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial X_N} \end{pmatrix}, \quad F_\Theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Theta_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \Theta_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \Theta_M} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Theta_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \Theta_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \Theta_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial \Theta_1} & \frac{\partial F_N}{\partial \Theta_2} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial \Theta_M} \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы приведено в статье [9].

Алгоритм градиентного метода минимальных ошибок:

1. Произвольным образом выбирается вектор $\Theta_{(0)} \in \mathcal{P}$, где \mathcal{P} – область, найденная методом отжига.
2. Решаем прямую задачу (2) для заданного набора параметров методом Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации. Определяем $X(t_k; \Theta_{(j)}) = \Phi_j^{(k)}$, $k = 1, \dots, K$.
3. Решаем сопряженную задачу (8) на промежутках (t_k, t_{k+1}) , $k = 0, 1, \dots, K$, $t_0 = 0$, $t_{K+1} = T$, методом Рунге-Кутты, учитывая в точках t_k разрывы решения задачи Коши (8).
4. Определяем по формуле (7) градиент целевого функционала $J(\Theta_{(j)})$.
5. Вычисляем параметр оптимизации $\alpha_j = \frac{2J(\Theta_{(j)})}{\|J'(\Theta_{(j)})\|}$ и следующую итерацию, согласно соотношению

$$\Theta_{(j+1)} = \Theta_{(j)} - \alpha_j J'(\Theta_{(j)}).$$

6. Проверяем условие остановки: если $J(\Theta_{(j+1)}) < \varepsilon$, то $\Theta_{(j+1)}$ – приближенное решение обратной задачи (4). Иначе переходим на шаг 2.

3 Описание работы с программой

Для работы с программой необходимо заполнить файл `input.txt` самостоятельно или воспользоваться приложением `Create_a_file.exe`.

В `input.txt` находится информация о параметрах алгоритма, о параметрах модели, о количестве измеряемых функций модели и пр. Программа поддерживает следующий синтаксис заполнения `input.txt`, построчно:

1. T_{max} - максимальная температура для метода отжига.
2. T_{min} - минимальная температура для метода отжига.
3. $epsilon$ - условие остановки градиентного метода.
4. $indicator$ - индикатор, указывающий на использования реальных данных ($indicator = 0$) или синтетических ($indicator = 1$).
5. Количество восстанавливаемых параметров.
6. вектор номеров восстанавливаемых параметров (через пробел).
7. Вектор нижних границ областей для восстанавливаемых параметров (через пробел).
8. Вектор верхних границ областей для восстанавливаемых параметров (через пробел).
9. Вектор "эталонных" параметров системы (19 чисел через пробел), если используются реальные данные, то вместо восстанавливаемых параметров можно поставить 0.
10. T - временной отрезок, рассматриваемый в задаче.
11. Вектор начальных данных для системы (9 чисел через пробел).
12. Количество измеряемых функции в задаче.
13. Вектор номеров измеряемых функций (через пробел).
14. Количество точек измерения.
15. Если используются реальные данные, то далее указываются (построчно) вектор дополнительных данных для обратной задачи для всех измеряемых функций.

После заполнения файла input.txt Вам нужно запустить программу Combined_metod_for_Trauer's_model.exe.

Во время вычисления программой вектора восстанавливаемых параметров, в папку Data записываются значения целевого функционала, относительной ошибки и вычисленные параметры в зависимости от числа итераций. Поэтому если вы воспользуетесь генераторами картинок (файлы с расширением .plt), приложенные вместе с основной программой, Вы получите картинки (с расширением .eps):

- изменение функционала, в зависимости от числа итераций;
- изменение относительной, в зависимости от числа итераций;
- изменение значений вычисляемых параметров, в зависимости от числа итераций.

В этой программе Вы можете использовать как реальные данные, так и синтетические данные, которые будут вычислены программой автоматически.

Вы можете восстанавливать любой вектор параметров $\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}_1, \dots, \tilde{\Theta}_m)^T \subset (\Pi, \mu, \varphi, \varphi_m, \varepsilon, k, \gamma, \nu, \eta, \omega, \delta, \delta_m, \mu_i, \mu_t, \beta, \beta_m, \chi, o, l)^T$, но только с помощью метода отжига. После его применения будет уточняться вектор наиболее чувствительных параметров модели, имеющих непосредственное влияние на течение эпидемии, $\bar{\Theta} = (\varepsilon, k, \nu, \delta, \delta_m, \chi, o)^T \in \mathbb{R}^7$.

Явный вид градиента целевого функционала (5) для модели (1) ($J'(\bar{\Theta}) \in \mathbb{R}^7$), вычисленного по формуле (7), выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
J'_1(\bar{\Theta}) &= - \int_0^T (L_A(t)(\Psi_6(t) - \Psi_2(t)) + L_{Am}(t)(\Psi_7(t) - \Psi_3(t)))dt, \\
J'_2(\bar{\Theta}) &= - \int_0^T (L_A(t)(\Psi_4(t) - \Psi_2(t)) + L_{Am}(t)(\Psi_5(t) - \Psi_3(t)))dt, \\
J'_3(\bar{\Theta}) &= - \int_0^T (L_B(t)(\Psi_6(t) - \Psi_4(t)) + L_{Bm}(t)(\Psi_7(t) - \Psi_5(t)))dt, \\
J'_4(\bar{\Theta}) &= - \int_0^T I(t)(\Psi_8(t) - \Psi_6(t))dt, \\
J'_5(\bar{\Theta}) &= - \int_0^T I_m(t)(\Psi_9(t) - \Psi_7(t))dt, \\
J'_6(\bar{\Theta}) &= - \int_0^T \frac{1}{N} (\beta(I(t) + oT(t))(-S_B(t)\Psi_1(t) + (S_B(t) + \\
&\quad + L_B(t) + L_{Bm}(t))\Psi_2(t) - L_B(t)\Psi_4(t) - L_{Bm}(t)\Psi_5(t)) + \\
&\quad + \beta_m(I_m(t) + oT_m(t))(-S_B(t)\Psi_1(t) + (S_B(t) + L_B(t) + \\
&\quad + L_{Bm}(t))\Psi_3(t) - L_B(t)\Psi_4(t) - L_{Bm}(t)\Psi_5(t)))dt,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
J'_7(\bar{\Theta}) = & - \int_0^T \frac{1}{N} (\beta \chi T(t) (-S_B(t) \Psi_1(t) + (S_B(t) + L_B(t) + \\
& + L_{Bm}(t)) \Psi_2(t) - L_B(t) \Psi_4(t) - L_{Bm}(t) \Psi_5(t)) + \beta_m \chi T_m(t) \times \\
& \times (-S_B(t) \Psi_1(t) + (S_B(t) + L_B(t) + L_{Bm}(t)) \Psi_3(t) - \\
& - L_B(t) \Psi_4(t) - L_{Bm}(t) \Psi_5(t)) dt.
\end{aligned}$$

Интегралы численно вычисляются методом Симпсона 4-го порядка аппроксимации. Шаг временной сетки для вычисления прямой и сопряженной задачи и градиента $h_t = 0.001$.

4 Пример применения программы

Используя файл `input.txt`, который находится в папке `Example`, такого вида:

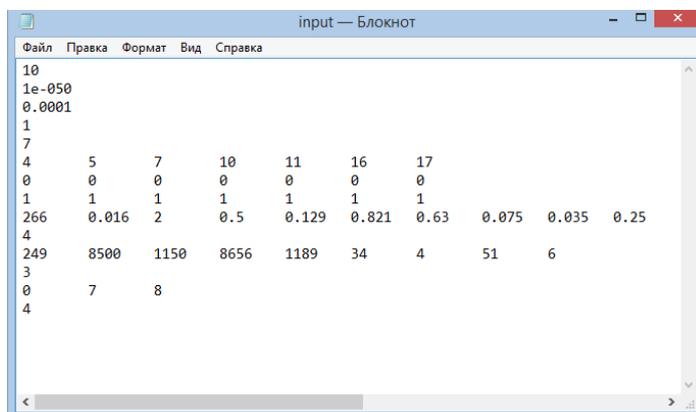


Рис. 1: Содержимое файла `input.txt`.

Запускаем программу `Combined_method_for_Trauer's_model.exe` при нажатии клавиши *Enter* начнется процесс вычисления параметров.

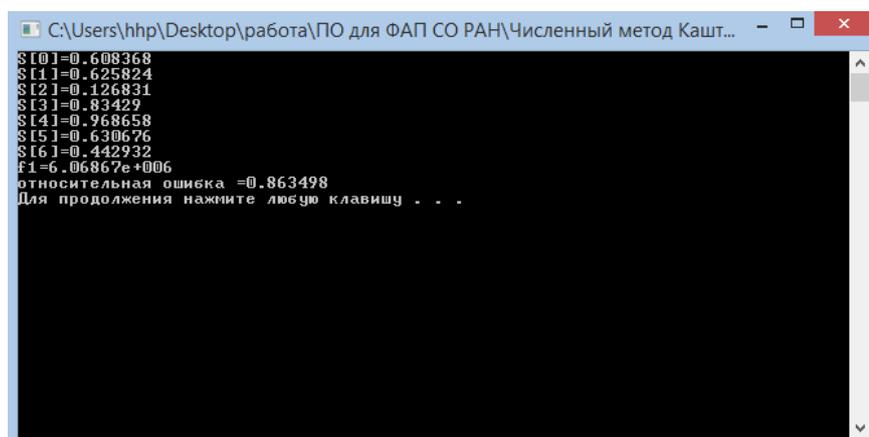


Рис. 2: Экран программы.

В колонке слева будет указан номер итерации, по-порядку значения восстанавливаемых параметров на данной итерации, значение функционала Φ и относительная ошибка (см. Рисунок 3). При достижении необходимой точности программа остановится, и будет отображен результат.

После окончания программы, используя полученные данные в папке `Data`, генерируем картинки:

```

C:\Users\hnp\Desktop\работа\ПО для ФАП СО РАН\Численный метод Кашт...
$G1=0.184894
func = 540.222
relative error =0.999397
Вычисление ...
count=200
temp=1.05913e-011
$G01=0.401317
$G11=0.174483
$G21=0.343822
$G31=0.171847
$G41=0.0101891
$G51=0.593748
$G61=0.271278
func = 368.593
relative error =0.782287
Вычисление ...

```

Рис. 3: Экран программы.

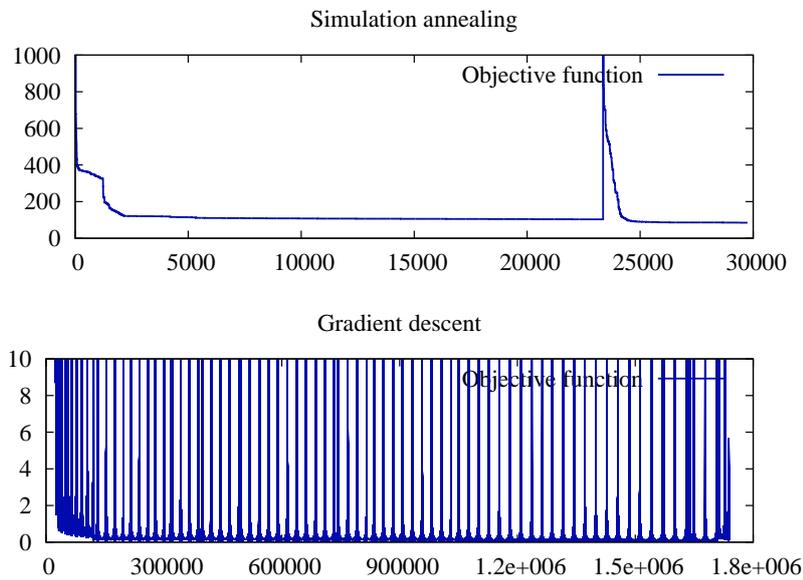


Рис. 4: График изменения целевой функции $J(\Theta_j)$ в зависимости от количества итераций j .

На графике зависимости целевого функционала (5) от количества итераций (Рис. 4) видно, что значение функционала уменьшается со стохастическими скачками во время применения метода отжига (29748 итераций) и с затухающими колебаниями во время применения метода градиентного спуска (1737440 итераций), что совпадает с правилами построения методов и их свойствами (см. Теорему 1 и работы [10, 11]).

На рисунке 5 видно что относительная ошибка уменьшается похожим образом.

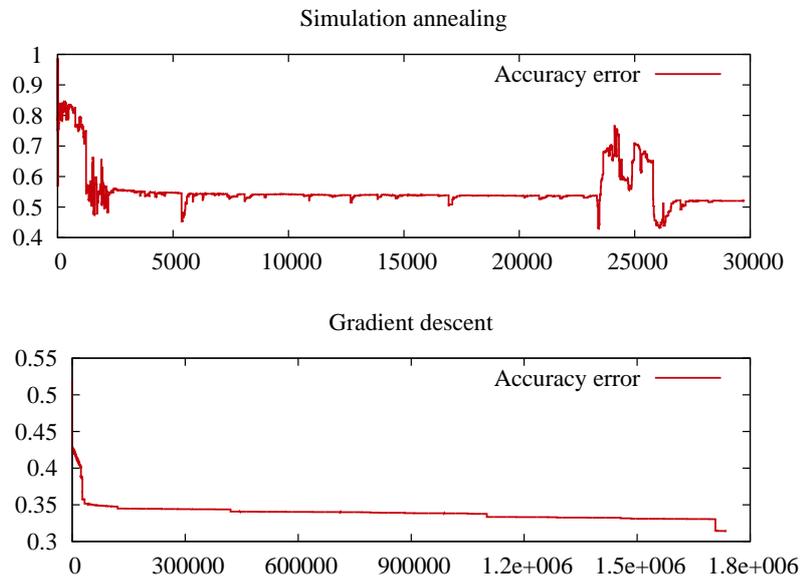


Рис. 5: График изменения относительной ошибки $\frac{|\Theta_j - \Theta_{exact}|}{|\Theta_{exact}|}$ в зависимости от количества итераций j .

Так же приведен полученный график изменения значений параметров в зависимости от количества итераций.

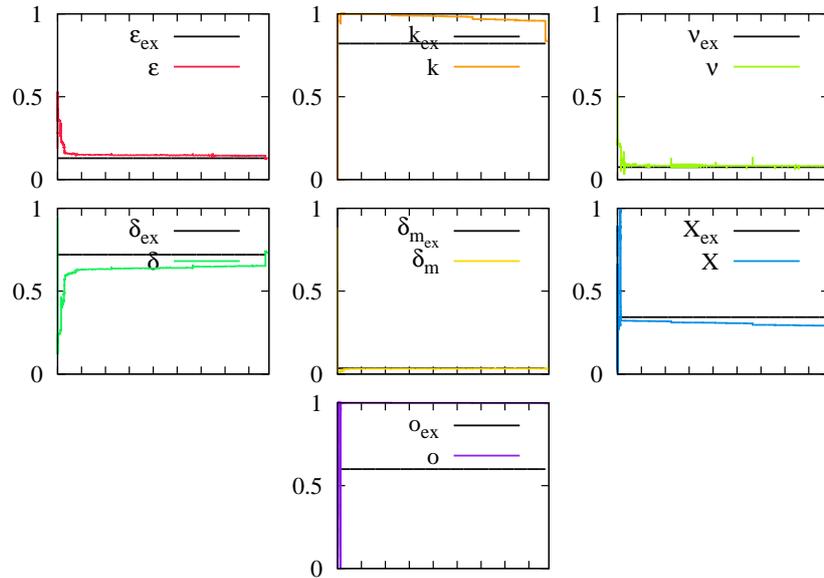


Рис. 6: График изменения значений параметров в зависимости от количества итераций (1767187 итераций комбинированного метода), полная область изменения параметров.

Литература

- [1] *J.M. Trauer, J.T. Denholm, E.S. McBryde.* Construction of a mathematical model for tuberculosis transmission in highly endemic regions of the Asia-pacific. *Journal of Theoretical Biology.* – 2014. – Vol. 358. – P. 74-84.
- [2] *Л.Э. Эльсгольц.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1969.
- [3] *А.С. Лопатин.* Метод отжига. Стохастическая оптимизация в информатике. – 2005. – Вып. 1. – С. 133–149.
- [4] *С.И. Кабанихин.* Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Berlin: Gruyter, 2011.
- [5] *А.А. Жиглявский, А.Г. Жилинскас.* Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991.
- [6] *L. Ingber.* Very fast simulated re-annealing. *Mathematical and Computer Modelling.* – 1989. – Vol. 12. – P. 967- 973.

- [7] *L. Ingber*. Simulated Annealing: Practice versus theory. *Mathematical and Computer Modelling*. – 1993. – Vol. 18. – №. 11. – P. 29-57.
- [8] *L. Ingber*. Adaptive simulated annealing (ASA): Lessons learned. *Journal “Control and Cybernetics”*. – 1996.
- [9] *А.И. Ильин, С.И. Кабанихин, О.И. Криворотько*. Об определении параметров моделей, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений. *Сибирские электронные математические известия*. – 2014. – Т. 11. – С. 62-76.
- [10] *В.В. Васин*. О сходимости методов градиентного типа для нелинейных уравнений. *Доклады РАН*. – 1998. – Т. 359. – №. 1. – С. 7–9.
- [11] *A. Neubauer, O. Scherzer*. A convergence rate result for a steepest descent method and a minimal error method for the solution of nonlinear ill-posed problems. *Z. Anal. Anw.* – 1995. – Vol. 14. – P. 369–377.
- [12] *С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин*. Прямые итерационные методы решения обратных и некорректных задач. *Сибирские электронные математические известия*. – 2008. – Т. 5. – С. 595–608.