Результаты тестирования программы ROS, предназначенной для вычисления траекторий сильного решения автономных систем стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) обобщенным методом типа Розенброка (МТР)

Т.А.Аверина

E-mail: ata@osmf.sscc.ru

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (СДУ)

Задача Коши для автономных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) в смысле Стратоновича записывается в виде

$$dY(t) = A(Y)dt + B(Y)dW(t), Y(T0) = Y_0, t \in [T0, TOUT], \quad \mathbf{(1)}$$

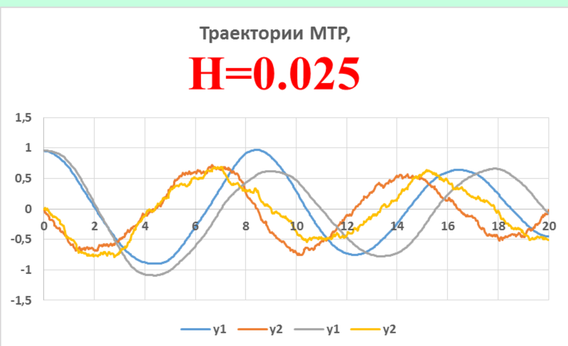
где $Y(t)$ вектор состояния системы - непрерывный случайный процесс размерности NS; $W(t)$- - NR мерный стандартный винеровский процесс; $A(y)$ - NS -мерная вектор-функция **(вектор сноса)**; $B(y)$ - матричная функция размера $NS \times NR$ **(матрица диффузии)**. Задаче Коши для СДУ (1) в смысле Стратоновича соответствует задача Коши для СДУ в смысле Ито

$$dY(t) = F(Y)dt + B(Y) \circ dW(t), Y(T0) = Y_0, t \in [T0, TOUT]$$

где

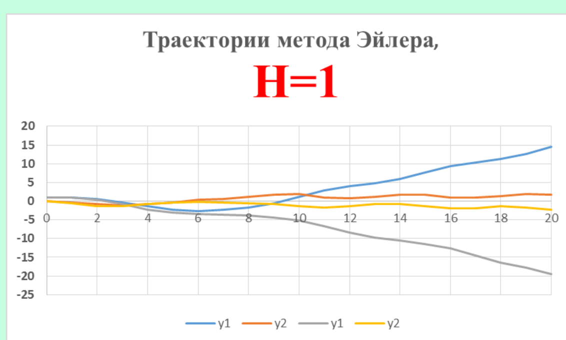
$$F(Y) = A(Y) + \frac{1}{2}\frac{\partial B(Y)}{\partial Y}B(Y), \quad A(Y) = F(Y) - \frac{1}{2}\frac{\partial B(Y)}{\partial Y}B(Y).$$

Траектории МТР **Траектории м. Эйлера**



H=0.2

H=1



ОБОБЩЕННЫЙ ДВУСТАДИЙНЫЙ МЕТОД РОЗЕНБРОКА (МТР) ДЛЯ РЕШЕНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ СДУ СТРАТОНОВИЧА

входит в семейство методов, рассмотренных в работе [1] и имеет вид [2]:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{3}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2 + \frac{1}{4}\left[B(Y_{n+1}^p) - B(Y_n)\right]\sqrt{H}\zeta \quad \mathbf{(2)}$$

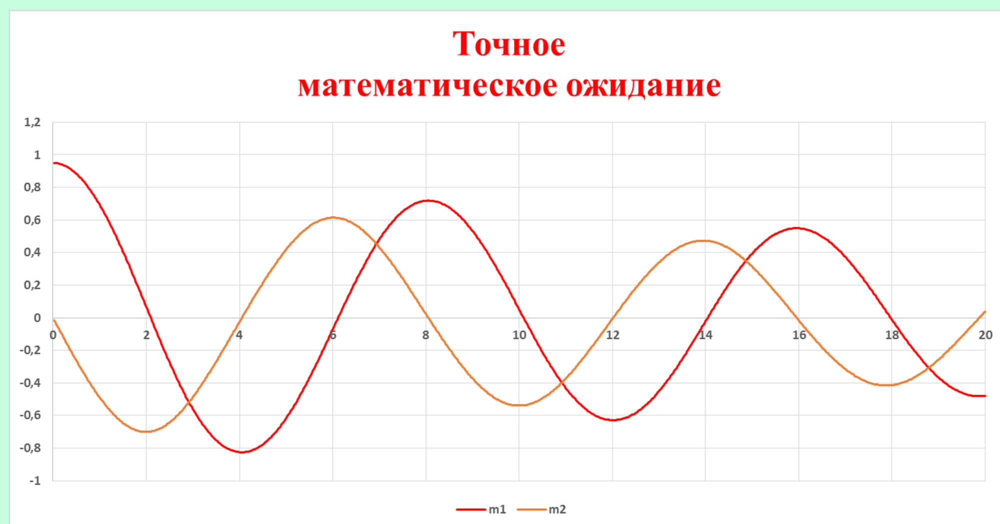
$$k_1 = \left(I - \frac{H}{4}\frac{\partial A}{\partial Y}(Y_n)\right)^{-1}\left[HA(Y_n) + \sqrt{H}B(Y_n)\zeta_n\right]$$

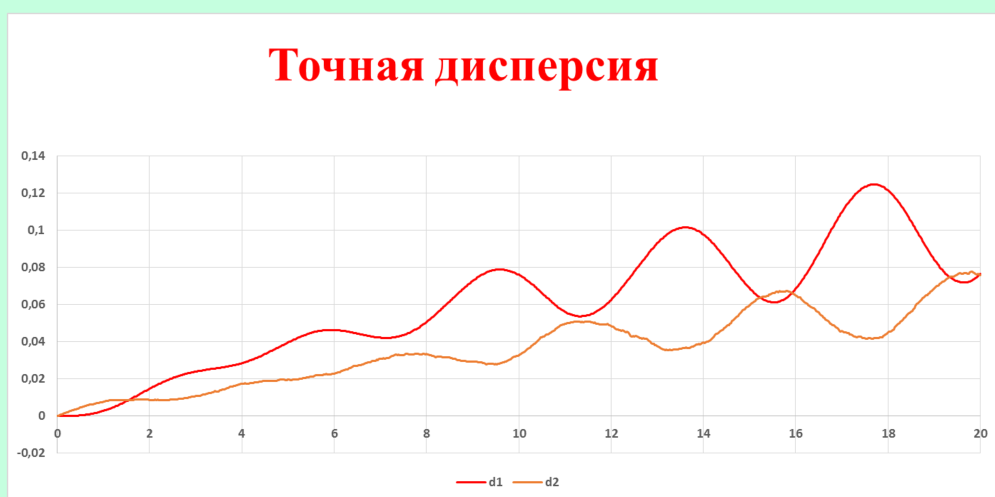
$$k_2 = \left(I - \frac{H}{4}\frac{\partial A}{\partial Y}(Y_n)\right)^{-1}\left[HA(Y_{n+1}^p) + \sqrt{H}B(Y_{n+1}^p)\zeta_n\right]$$

$$Y_{n+1}^p = Y_n + k_1$$

H- шаг интегрирования; $\{\zeta_n\}$ - независимые стандартные нормальные случайные величины; Y_n - численное решение в узле сетки $t_n = T0 + nH$, $\frac{\partial A}{\partial Y}$ - **матрица Якоби** вектора сноса в точке Y_n; I - единичная матрица.

Вероятностные характеристики решения





ОБОБЩЕННЫЙ ДВУСТАДИЙНЫЙ МЕТОД РОЗЕНБРОКА (МТР) ДЛЯ РЕШЕНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ СДУ ИТО

входит в семейство методов, рассмотренных в работе [3] и имеет вид [4]:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{3}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2 + \sqrt{H}\left(I - \frac{H}{4}\frac{\partial A}{\partial Y}(Y_n)\right)^{-2}B(Y_n)\zeta_n \quad \mathbf{(3)}$$

$$k_1 = H\left(I - \frac{H}{4}\frac{\partial A}{\partial Y}(Y_n)\right)^{-1}A(Y_n)$$

$$k_2 = H\left(I - \frac{H}{4}\frac{\partial A}{\partial Y}(Y_n)\right)^{-1}A(Y_n + k_1)$$

Метод (2) является асимптотически несмещенным методом с любым шагом при решении СДУ с аддитивным шумом [1], а метод (3) является A-устойчивым при решении СДУ с мультипликативным шумом [3].

ПРОГРАММА ROS

Программа **ROS** вычисляет траектории сильного решения автономной системы стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито и в смысле Стратоновича в узлах равномерной сетки с шагом **H** на интервале **[T0, TOUT]**. Программа использует основную подпрограмму **ROSSDE.** Предполагается, что в начальный момент времени t_0 известно распределение вектора состояния системы Y_0.

ПОДПРОГРАММА ROSSDE

Подпрограмма **ROSSDE** предназначена для численного интегрирования автономных систем СДУ (1) в смысле Стратоновича асимптотически несмещенным с любым шагом интегрирования обобщенным двухстадийным методом типа Розенброка (2) и автономных систем СДУ (1) в смысле Ито обобщенным двухстадийным методом типа Розенброка (3).

ТЕСТОВЫЙ ПРИМЕР ДЛЯ ПРОГРАММЫ ROS

Численные испытания программы ROS продемонстрируем на решении системы СДУ

$$dY_1(t) = Y_2 dt,$$

$$dY_2(t) = \left(-\frac{r_1}{r_2}Y_2 - \frac{r_3}{r_2}\sin(Y_1)\right)dt - r_1\sin(Y_1)dW_1(t) - r_1\cos(Y_1)dW_2(t)$$

Для этой системы СДУ в смысле Ито и СДУ в смысле Стратоновича совпадают. При численных расчетах полагали:

$$Y_1(0) = 0.95045, \quad Y_2(0) = 0, \quad r_1 = 0.1, \quad r_2 = 1.5, \quad r_3 = 1.$$

Для демонстрации свойств асимптотической несмещенности метода (2) приведем его сравнение с методом Эйлера решения СДУ в смысле Ито.

$$Y_{n+1} = Y_n + HA(Y_n) + \sqrt{H}B(Y_n)\zeta_n \quad (4)$$

ОЦЕНКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ

Используя связь интеграла Ито и интеграла Стратоновича, всегда можно от СДУ в смысле Ито перейти к СДУ в смысле Стратоновича и наоборот.

Обычно при численном моделировании систем СДУ вычисляют

- траектории решения,
- фазовые траектории решения,

оценивают

- различные числовые функционалы от решения, как например:
- математическое ожидание,
- матрицу центральных вторых моментов

Обозначения для оценок:

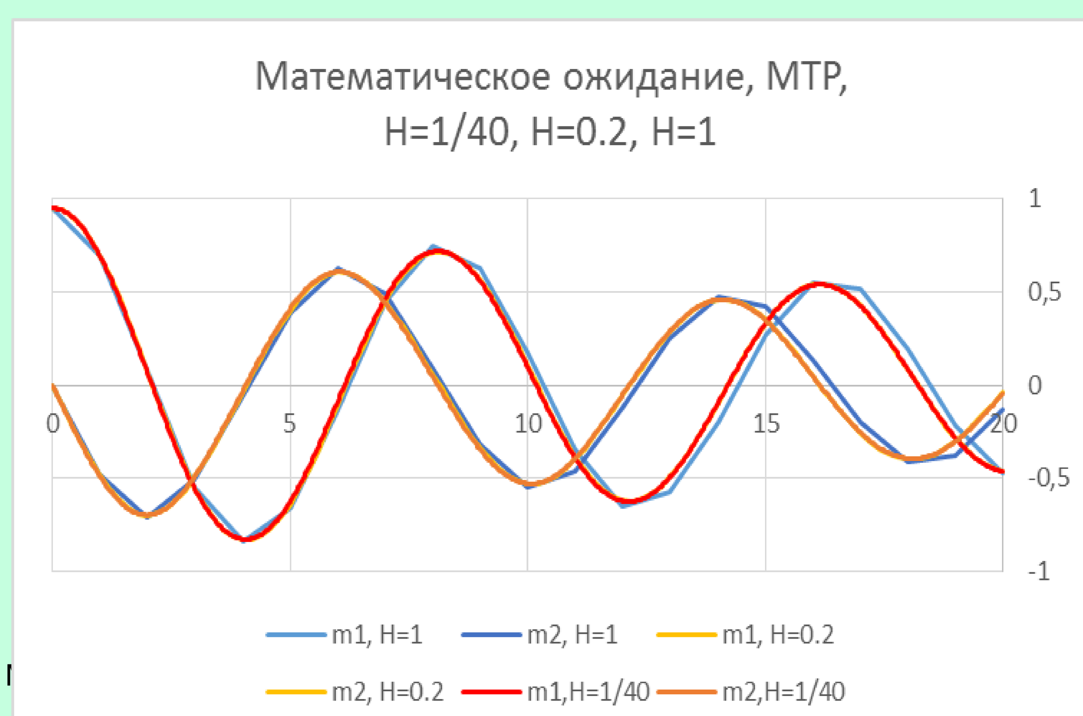
$m\_1: \quad Ey_1(t)$

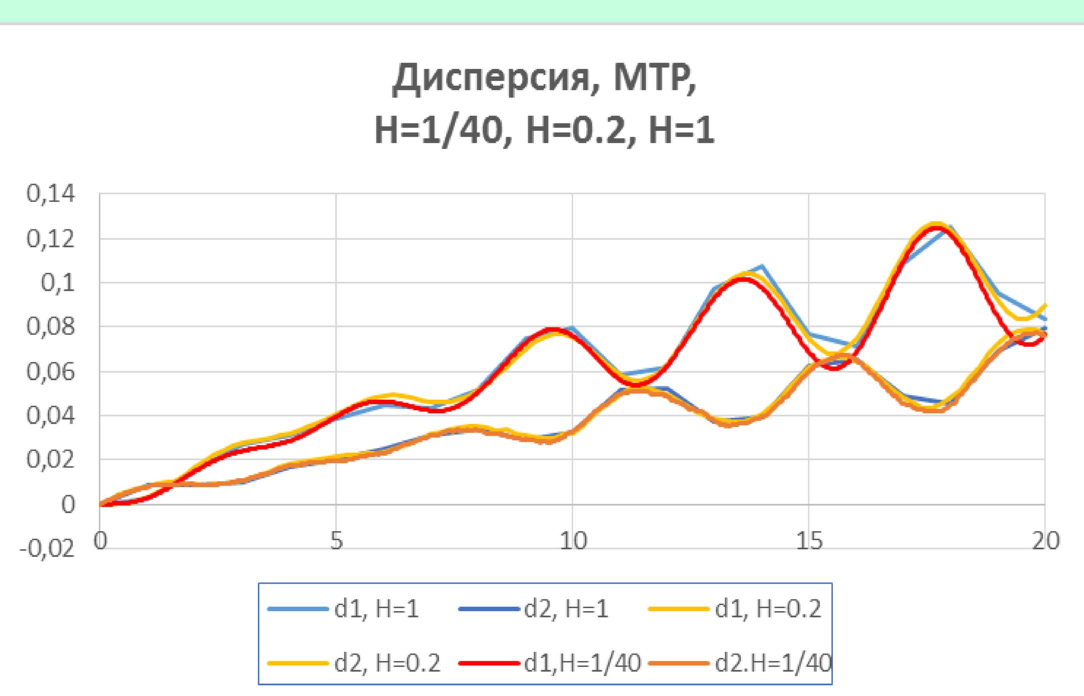
$m\_2: \quad Ey_2(t)$

$d\_1: \quad E(y_1(t) - Ey_1(t))^2$

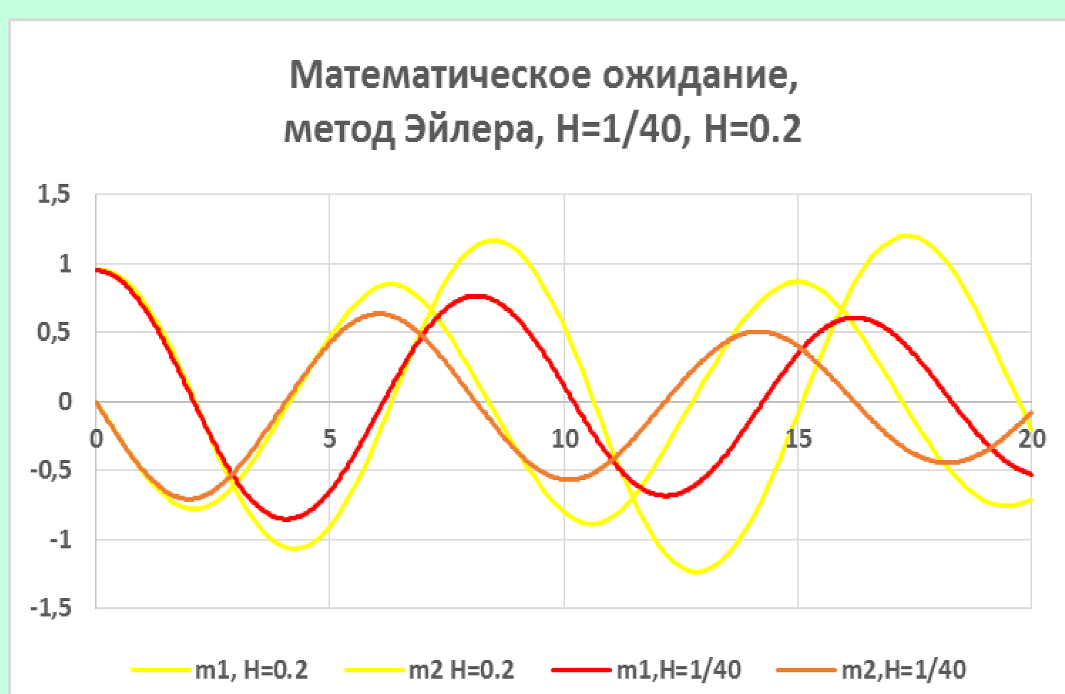
$d\_2: \quad E(y_2(t) - Ey_2(t))^2$

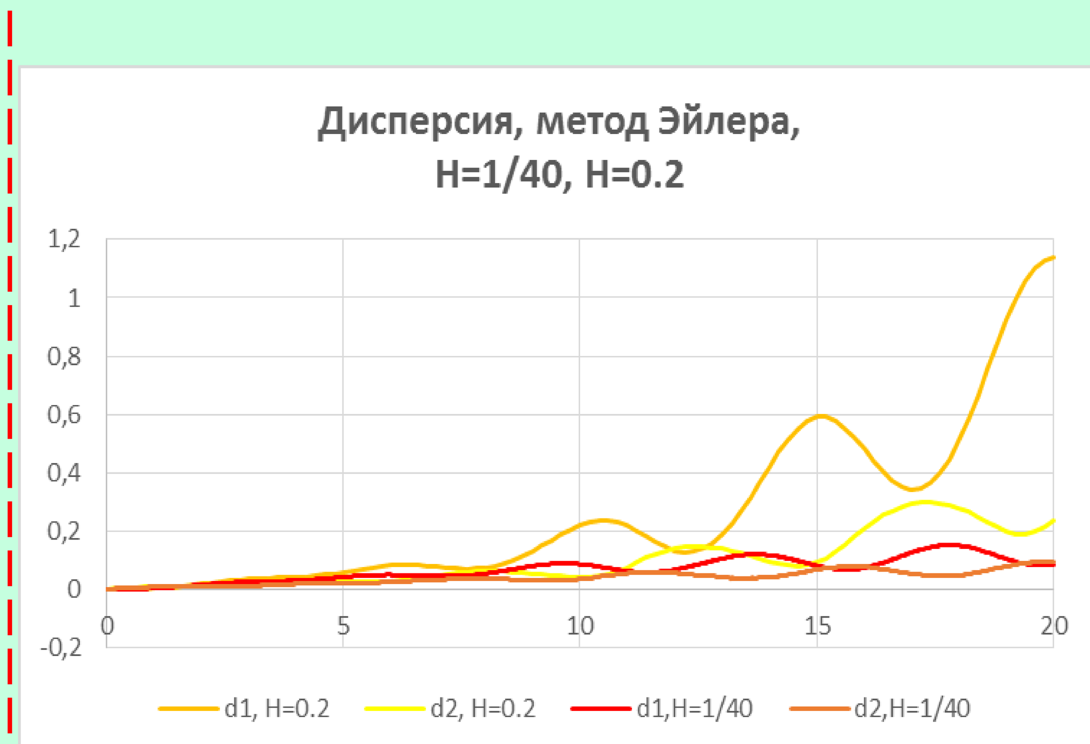
ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ТИПА РОЗЕНБРОКА H=0.025, H=0.2, H=1



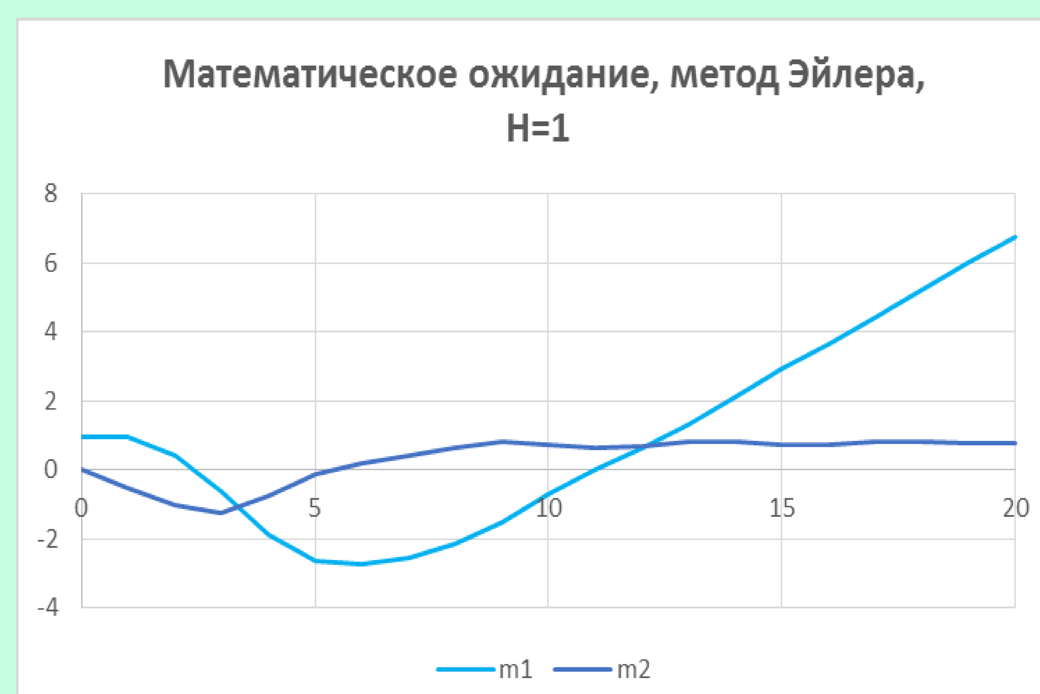


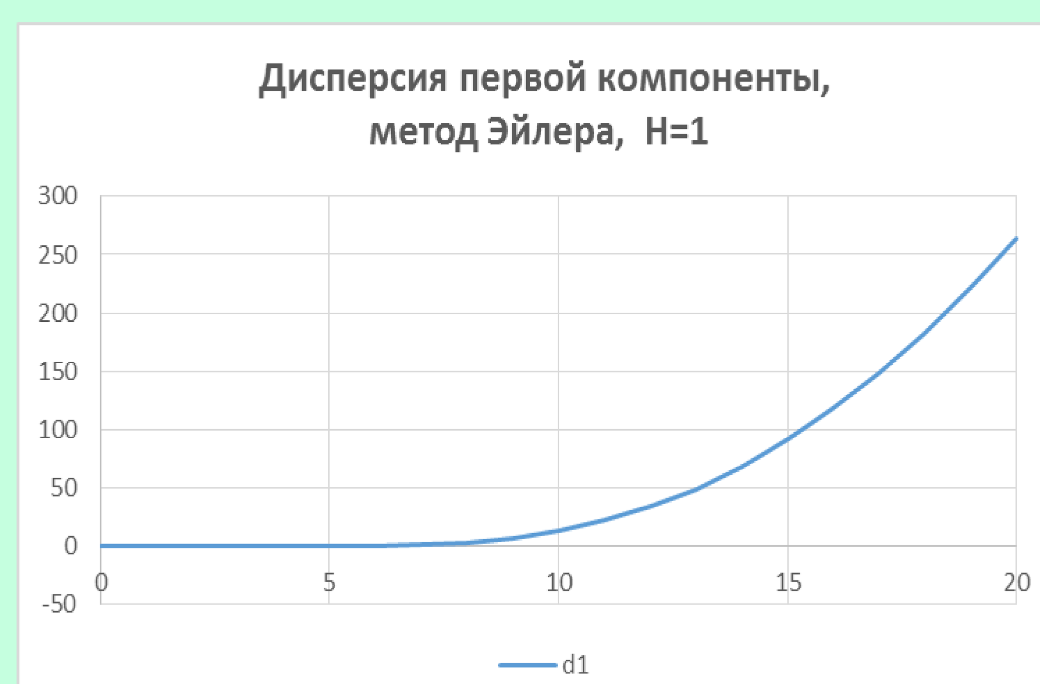
МЕТОД ЭЙЛЕРА H=0.025, H=0.2,





МЕТОД ЭЙЛЕРА H=1





Тестовый пример демонстрирует свойство асимптотической несмещенности обобщенного метода типа Розенброка (2) для решения автономных систем стохастических дифференциальных уравнений (1) в смысле Стратоновича.

Литература

1. Т.А. Аверина, С.С. Артемьев. Новое семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР, 1986, т.288, N 4, с. 777-780.
2. . Т.А. Аверина, С.С. Артемьев. Некоторые вопросы построения и использования численных методов для решения систем стохастических дифференциальных уравнений. Новосибирск. 1987. – 32 с. – (Препринт / АН СССР Сиб. Отд.-ние, ВЦ; №728).
3. С.С. Артемьев. "Устойчивость численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений.." Сибирский математический журнал, 1994, т. 35, №6, 1210-1214.
4. Artemiev S.S., Averina T.A. Numerical Analysis Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. VSP, Utrecht, The Netherlands, 1997 (176 p.)