Результаты тестирования программы «Вычисление вероятностных характеристик решения систем со случайной структурой с распределенными переходами методом Монте-Карло»

Т.А.Аверина

E-mail: ata@osmf.sscc.ru

СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

Векторное уравнение для фиксированной l-й структуры имеет вид стохастических дифференциальных уравнений **(СДУ) в смысле Ито**

$$dy(t) = a^{(l)}(y)dt + \sigma^{(l)}(y)dw(t), \quad y(t_0) = y_0, t \in [t_0, T], \quad \textbf{(1)}$$

где $y(t)$ - вектор состояния системы размерности n_y; $w(t)$ - n_w мерный стандартный винеровский процесс; $a^{(l)}$ - n_y -мерные вектор-функции; $\sigma^{(l)}$ - матричные функции размера $n_y \times n_w$; $l = 1,\dots,n_L$, где n_L обозначает число структур. Если есть управление, то оно входит линейно в вектор сноса $a^{(l)}$.

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ С НЕЗАВИСИМЫМИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

- моделирование процесса номера структуры (использование метода максимального сечения)

- 0) k:=0; моделируем L_k согласно начальному условию $L(t_0)$
- 1) $l := L_k$; моделируем τ - возможное время нахождения системы в текущей структуре по методу максимального сечения:
  - 1.1) $\tau := 0$;
  - 1.2) моделируем ξ - значение случайной величины с условной плотностью $p(x) = \overline{\nu_l}(t_k + x)\exp(-\int_0^x \overline{\nu_l}(t_k + u)du)$, $x > 0$ и полагаем $\tau := \tau + \xi$;
  - 1.3) $t_{k+1} := t_k + \tau$; если $t_{k+1} \ge T$, то $t_{k+1} = T$ и STOP;
  - 1.4) $\alpha := rand$; если $\alpha > \frac{\nu_l(t_{k+1})}{\overline{\nu_l}(t_{k+1})}$, то идем на 1.2);
- 2) $\alpha := rand$; если $\sum_{i=1 \ne l}^{r-1} \frac{\nu_{li}(t_{k+1})}{\overline{\nu_l}(t_{k+1})} < \alpha \le \sum_{i=1 \ne l}^{r} \frac{\nu_{li}(t_{k+1})}{\overline{\nu_l}(t_{k+1})}$, то $L_{k+1} := r$;
- 3) $k := k+1$, идем на 1);

- моделирование вектора состояния системы:

на интервалах $[t_k, t_{k+1}]$ моделируем вектор состояния системы **обобщенным методом Эйлера** для СДУ (1) в смысле Ито

$$y_{n+1} = y_n + f^{(L_k)}(y_n)h_n + \sigma^{(L_k)}(y_n)\sqrt{h_n}\zeta_n, \quad \textbf{(3)}$$

где h- шаг интегрирования; $\{\zeta_n\}$ - независимые стандартные нормальные случайные величины. Сетка включает равномерную сетку с постоянным шагом *h* и моменты смены структуры.

СДУ (1) в смысле Ито соответствует **СДУ в смысле Стратоновича**

$$dy(t) = f^{(l)}(y)dt + \sigma^{(l)}(y) \circ dw(t), \quad y(t_0) = y_0, t \in [t_0, T], \quad \textbf{(2)}$$

где

$$f^{(l)} = a^{(l)} - \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma^{(l)}}{\partial y}\sigma^{(l)}, \qquad a^{(l)} = f^{(l)} + \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma^{(l)}}{\partial y}\sigma^{(l)}.$$

Состояние системы характеризуется смешанным процессом $(y(t), L(t))$. Вектор фазовых координат $y(t)$ для каждой структуры является многомерным марковским случайным процессом, а номер структуры $L(t)$ - дискретным целочисленным процессом с конечным числом состояний.

В системах с распределенными переходами задается $\nu(t)$ - матрица интенсивностей перехода, где $\nu_{lr}(t)$ - интенсивность перехода из l - й структуры в r - ю, причем $\nu_{lr}(t) \le \overline{\nu}_{lr}$, $\overline{\nu}_l = \sum \overline{\nu}_{lr}(r \ne l)$.

Программа предназначена

Программа предназначена для вычисления вероятностных характеристик решения систем со случайной структурой с распределенными переходами. Вектор состояния *y(t)* в каждой l-й структуре задан автономными стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) в смысле Ито.

Использованный алгоритм: Для моделирования решения используются обобщенный метод Эйлера и метод максимального сечения [1].

Оцениваются следующие вероятностные характеристики решения в узлах сетки:

1) **условные (для каждой структуры)**: начальные и центральные первые два моменты решения;
2) **безусловные**: начальные и центральные первые два моменты решения;
3) вероятности состояний;
4) плотности вероятностей для каждой структуры;
5) маргинальные плотности распределения.

Область применения: программа рассчитана на математиков – вычислителей и может быть использована для моделирования динамических систем (модели которых заданы системами со случайной структурой с распределенными переходами), в самых различных областях науки: автоматическом управлении, статистической механике, химии, медицине, радиотехнике, теории надежности и т.д.

ТЕСТОВЫЙ ПРИМЕР

Требуется найти вероятности работы системы в режимах нормального функционирования и срыва стабилизации, маргинальные плотности вероятности, условные и безусловные начальные и центральные первые два момента координат вектора состояния. Результаты расчетов представлены на рисунках. Моделировалось 10^6 траекторий с шагом $h = 0.01$.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕШЕНИЯ

При решении задач со случайной структурой возникает потребность в вычислении вероятностных характеристик решения.

1. Вероятности нахождения в *l*-й структуре (или вероятности состояния):

$$P^{(l)}(t) = P(L(t) = l), \quad \sum_{l=1}^{n_L} P^{(l)}(t) = 1.$$

2. Плотности условного распределения *y(t)* при *L(t)=l*:

$$p^{(l)}(y,t) = p(y(t) \mid L(t) = l), \quad \int_{-\infty}^{\infty} p^{(l)}(y,t)dy = 1.$$

3. Плотности совместного распределения *(y(t),L(t))*:

$$p(y(t), L(t)), \quad \sum_{l=1}^{n_L}\int_{-\infty}^{\infty} p(y(t), L(t) = l)dy = \sum_{l=1}^{n_L} P^{(l)}(t)\int_{-\infty}^{\infty} p^{(l)}(y,t)dy = 1.$$

4. Начальных и центральных моментов относительно этих плотностей.

ТЕСТОВЫЙ ПРИМЕР

Задача стабилизации малого искусственного спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов

$$dy(t) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix}\right)dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} dw(t), \quad t \in [0,1],$$

$y_1(t)$ - угол отклонения оси спутника по отношению к радиус-вектору центра масс, $y_2(t)$ - угловая скорость вращения спутника вокруг центра масс; $y_1(0) \in N(-0.3;1)$ и $y_2(0) \in N(0.1;1)$ независимы.

Управляющее воздействие ***u(t)*** задается соотношением

$$u(t) = -0.2(1 - tg1 - 2tg^2 1)\cos(t) - 0.2(3 + 3tg1 + 2tg^2 1)\sin(t)$$

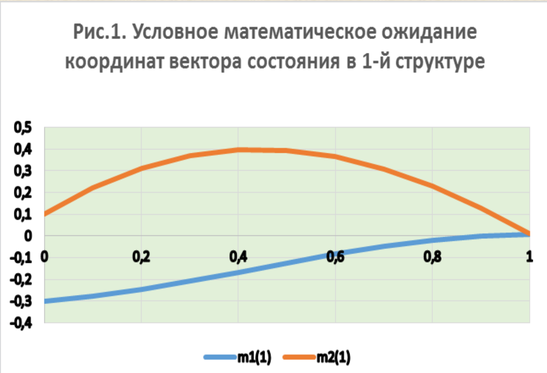
и в среднем обеспечивает стабилизацию спутника в момент времени *t = 1*, т.е. математические ожидания величин $y_1(1)$ и $y_2(1)$ равны нулю.

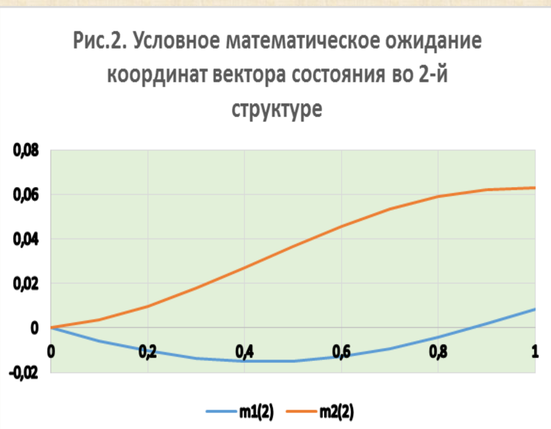
Рассматривается ситуация, когда в случайный момент времени возможен отказ управляющего устройства (срыв стабилизации) с последующим восстановлением режима нормального функционирования. Интенсивности отказа и восстановления задаются, соответственно, функциями $\nu_{12}(t) = 0.2$ и $\nu_{21}(t) = 0.1$. В начальный момент времени система функционирует нормально. Данную систему управления можно рассматривать как систему со случайной структурой, описываемую уравнениями

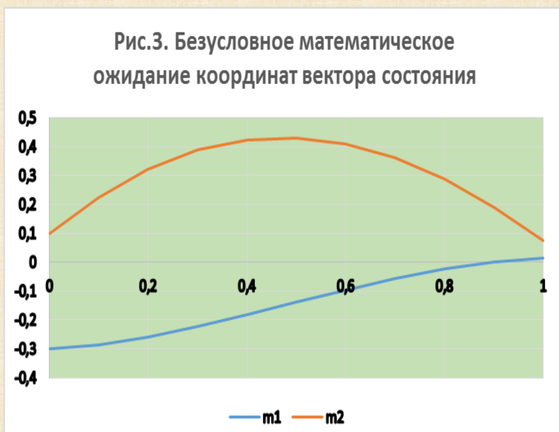
$$dy(t) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ (2-l)u(t) \end{pmatrix}\right)dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} dw(t), \quad l = 1,2$$

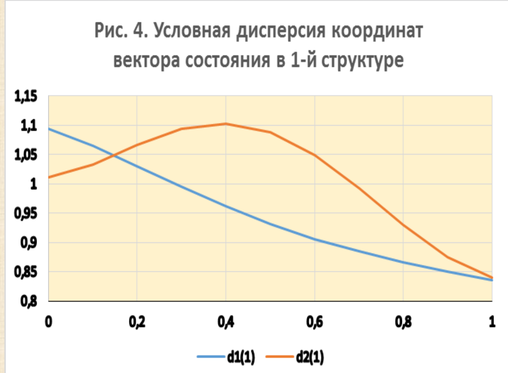
где *l = 1* соответствует режиму нормального функционирования, а *l = 2* - режиму срыва стабилизации.

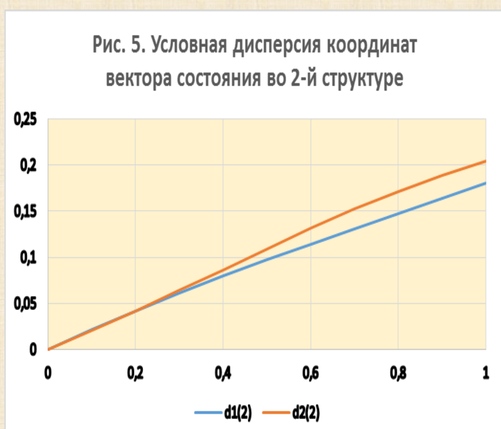
ОЦЕНКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ, ДИСПЕРСИЙ И ПЛОТНОСТЕЙ

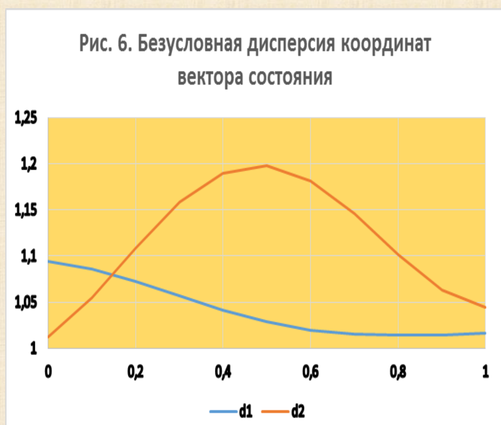






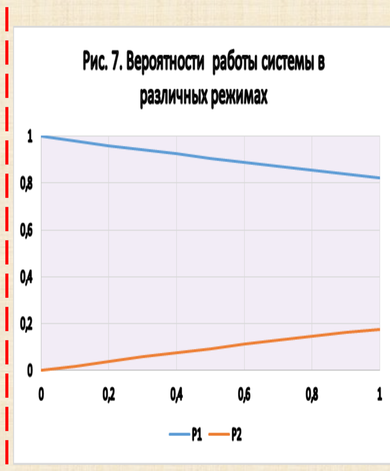






Обозначения для оценок:

$m1: \quad Ey_1(t)$;
$m1(1): \quad Ey_1^{(1)}(t)$;
$m1(2): \quad Ey_1^{(2)}(t)$;
$m2: \quad Ey_2(t)$;
$m2(1): \quad Ey_2^{(1)}(t)$;
$m2(2): \quad Ey_2^{(2)}(t)$;
$d2: \quad E(y_2(t) - Ey_2(t))^2$;
$d1(1): \quad E(y_1^{(1)}(t) - Ey_1^{(1)}(t))^2$;
$d1(2): \quad E(y_1^{(2)}(t) - Ey_1^{(2)}(t))^2$;
$d2: \quad E(y_2(t) - Ey_2(t))^2$;
$d2(1): \quad E(y_2^{(1)}(t) - Ey_2^{(1)}(t))^2$;
$d2(2): \quad E(y_2^{(2)}(t) - Ey_2^{(2)}(t))^2$;
$p: \quad p(y_1,t)$;
$p(1): \quad p^{(1)}(y_1,t)$;
$p(2): \quad p^{(2)}(y_1,t)$;
$P1: \quad P^{(1)}(t)$;
$P2: \quad P^{(2)}(t)$.



ТЕСТОВЫЙ ПРИМЕР ДЕМОНСТРИРУЕТ КАКИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ ОЦЕНИВАЕЮТСЯ В ПРОГРАММЕ

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.А. Аверина. Статистический алгоритм моделирования динамических систем с переменной структурой // Сиб. ЖВМ, 2002, т. 5, № 1, сс. 1-10.