Вывод алгебраических формул

Маятник Максвелла представляет собой диск (1), неподвижно закрепленный на стержне (2), на который намотаны нити (3) (см. рис. 1). Диск маятника представляет собой непосредственно сам диск и сменные кольца (4), которые закрепляются на диске.

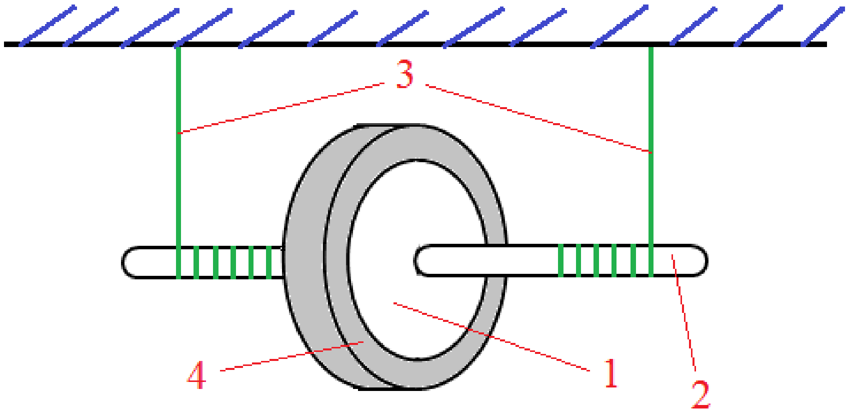

Рис. 1. Схематичное изображение маятника Максвелла

При освобождении маятника диск начинает движение: поступательное вниз и вращательное вокруг своей оси. Вращение, продолжаясь по инерции в низшей точке движения (когда нити уже размотаны), приводит вновь к наматыванию нитей на стержень, а, следовательно, и к подъему маятника. Движение маятника после этого снова замедляется, маятник останавливается и снова начинает свое движение вниз и т.д.

Основным законом, который описывает движение объекта в данной программе, является закон сохранения энергии. Для маятника он выглядит следующим образом:

$$E = \frac{m{V_m}^2}{2} + \frac{J{\omega_m}^2}{2} = mgh_m,$$

где E – полная энергия колебательной системы, Дж;

m – масса маятника, кг;

V_m – макимальная скорость поступательного движения маятника, м/с;

J – момент инерции маятника, кг * м^2;

ω_m – максимальная угловая скорость маятника, с$^{-1}$;

h_m – максимальная высота подъема маятника, м;

g – ускорение свободного падения, 9.8 м/с^2.

Ускорение поступательного движения центра масс маятника (a) может быть получено по измеренному времени t и проходимому маятником расстоянию h из уравнения

$$a = \frac{2h}{t^2}$$

Масса маятника m является суммой масс его частей (оси m_0, диска $m_д$ и кольца $m_к$).

$$m = m_0 + m_д + m_к$$

Момент инерции маятника J также является аддитивной величиной и определяется как сумма моментов инерции оси $J_о$, диска $J_д$ и кольца $J_к$ маятника.

$$J_o = \frac{1}{2} m_o {R_o}^2$$

$$J_д = \frac{1}{2} m_д \left({R_o}^2 + {R_д}^2\right)$$

$$J_к = \frac{1}{2} m_к \left({R_д}^2 + {R_к}^2\right),$$

где $R_о$, $R_д$, $R_к$ – радиусы оси, диска и кольца соответственно.

Как следует из основного уравнения динамики вращательного движения абсолютно твердого тела:

$$J\varepsilon = M$$

Диск совершает вращательное движение под действием сил натяжения. Тогда, момент силы можно определить следующим образом:

$$M = T * R_o,$$

где T – сила натяжения нити, Н. $R_о$ – плечо силы, поскольку диаметром нити можно пренебречь.

Исходя из данного выражения и указанного выше основного уравнения динамики вращательного движения, получаем:

$$J\varepsilon = T * R_o$$

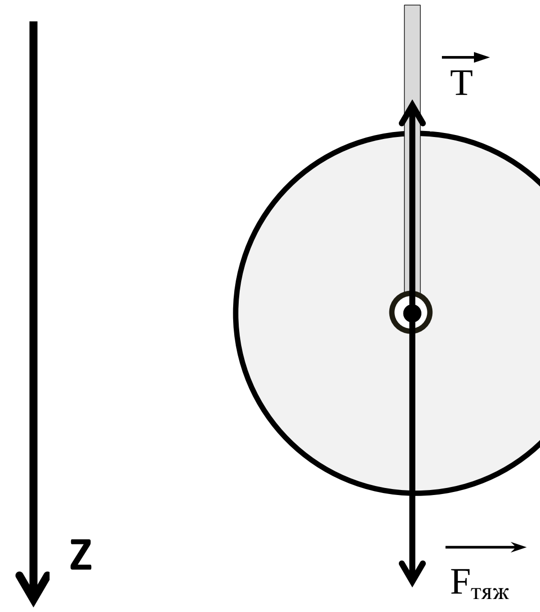

Рис. 2. Силы, действующие на маятник

По второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

$$ma = mg - T$$

$$T = m(g - a)$$

Тогда угловое ускорение можно найти так:

$$\varepsilon = \frac{m(g - a) * R_o}{J}$$

$$\varepsilon = \frac{mgR_o}{J} - \frac{maR_o}{J}$$

Существуют следующая зависимость между угловым и линейным ускорением:

$$a = \varepsilon * R_o$$

Исходя из этой зависимости для линейного ускорения можно получить следующее выражение:

$$\frac{a}{R_0} = \frac{mgR_o}{J} - \frac{maR_o}{J}$$

$$a + \frac{maR_o{}^2}{J} = \frac{mgR_o{}^2}{J}$$

$$a * \left(1 + \frac{mR_o{}^2}{J}\right) = \frac{mgR_o{}^2}{J}$$

$$a = \frac{mgR_o{}^2}{J * \left(1 + \frac{mR_o{}^2}{J}\right)}$$

$$a = \frac{mgR_o{}^2}{mR_o{}^2 + J}$$

Мы получили линейное ускорение при движении маятника.

Зная линейное и угловое ускорение можно найти скорость в момент времени t:

$$V = a * t$$

$$\omega = \varepsilon * t$$

А также пройденный путь (h) или угол поворота (φ) в момент времени t:

$$h = \frac{at^2}{2}$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$$